Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir crescător şi mărginit. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n-a_1-a_2)(2a_n-a_2-a_3)\cdots(2a_n-a_{n-2}-a_{n-1})(2a_n-a_{n-1}-a_1).$$

Soluţie. Notăm

$$x_n=(2a_n-a_1-a_2)(2a_n-a_2-a_3)\cdots(2a_n-a_{n-2}-a_{n-1})(2a_n-a_{n-1}-a_1).$$

Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent; fie $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Avem $a_n\leq L$, oricare ar fi $n\geq 1$.

.... **1p**

Atunci $2a_n-a_k-a_{k+1}\leq 2L-a_k-a_{k+1}\leq 2(L-a_k)$, $k=1,2,\ldots,n-2$,

.... **1p**

deci $0\leq x_n\leq 2^{n-1}(L-a_1)(L-a_2)\cdots(L-a_{n-2})(L-a_1)=y_n$. Presupunem că $y_n>0$, în caz contrar $y_n=0$ şi apoi $x_n=0$.

.... **2p**

Cum $\frac{y_{n+1}}{y_n}=2(L-a_n)\to 0$,

.... **1p**

din criteriul raportului deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

.... **1p**

Din criteriul cleştelui obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

.... **1p**

Problema 2. Fie matricele de ordin 2 cu elemente reale A şi B astfel încât

$$AB=A^2B^2-(AB)^2 \quad \text{şi} \quad \det(B)=2.$$

a) Arătaţi că matricea A nu este inversabilă.
b) Calculaţi $\det(A+2B)-\det(B+2A)$.

Soluţie. a) Avem $A(AB-BA-I_2)B=O_2$, de unde

$$A(AB-BA-I_2)=O_2,$$

deoarece B este inversabilă. Presupunând că matricea A este inversabilă, rezultă $AB-BA=I_2$, fals, deoarece $\mathrm{tr}(AB-BA)=0\neq 2=\mathrm{tr}(I_2)$.

.... **2p**

b) Fie $f(x)=\det(A+xB)$, unde $x\in\mathbb{R}$. Deoarece $\det(A)=0$, există $a\in\mathbb{R}$ astfel ca $f(x)=ax+\det(B)x^2=2x^2+ax$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

.... **2p**

Avem $\det(A+2B)-\det(B+2A)=f(2)-4f(1/2)$.

.... **2p**

Atunci $\det(A+2B)-\det(B+2A)=8+2a-4(1/2+a/2)=6$.

.... **1p**

Problema 3. Fie A o matrice neinversabilă de ordin n, $n > 1$, cu elemente în mulţimea numerelor complexe, toate elementele având modulul egal cu 1.

a) Arătaţi că pentru $n = 3$, două dintre liniile sau două dintre coloanele matricei A sunt proporţionale.

b) Rămâne adevărată concluzia de la punctul anterior pentru $n = 4$?

Soluţie. a) Scoatem factor comun de pe fiecare linie primul element al său. Repetăm procedeul de pe fiecare coloană, obţinând o matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{pmatrix},$$

cu a, b, c, d numere complexe de modul 1.

Condiţia $\det(A) = 0$ revine la $(a-1)(d-1) = (b-1)(c-1)$.

.... **2p**

Conjugând, obţinem $\overline{ad}(a-1)(d-1) = \overline{bc}(b-1)(c-1)$. Dacă $(a-1)(d-1) = 0$, atunci $(b-1)(c-1) = 0$, deci două linii sau două coloane sunt egale cu $(1 \quad 1 \quad 1)$ şi problema este rezolvată.

.... **2p**

Dacă $(a-1)(d-1) = (b-1)(c-1) \neq 0$, atunci $\overline{ad} = \overline{bc}$, deci $ad = bc$. Din $(a-1)(d-1) = (b-1)(c-1)$ rezultă $a+d = b+c$, prin urmare $\{a, d\} = \{b, c\}$ sau $a = b = c = d$. Rezultă că ultimele două linii sau coloane sunt egale, de unde obţinem cerinţa.

.... **1p**

b)[1] Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & i & -i \\ 1 & -i & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 \end{pmatrix}$ are determinantul nul şi are orice două linii (coloane) neproporţionale, deci concluzia nu mai rămâne adevărată pentru $n = 4$.

.... **2p**

Problema 4. Se consideră o funcţie monotonă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că f are limite laterale în fiecare punct $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) Definim funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \lim\limits_{t \nearrow x} f(t)$, i.e. $g(x)$ este limita la stânga în punctul x. Arătaţi că dacă funcţia g este continuă, atunci funcţia f este continuă.

Soluţie. Vom presupune că funcţia f este monoton crescătoare.

a) Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Mulţimea $\{f(x) \mid x < x_0\}$ este mărginită superior de $f(x_0)$, conform monotoniei funcţiei f. Notăm cu $L = \sup\{f(x) \mid x < x_0\}$ şi arătăm că $L = f(x_0 - 0)$.

[1] Exemplul se obţine astfel: minorul elementului din colţul stânga sus al matricei obţinute prin scăderea primei linii din celelalte trei linii este un determinant al unei matrice antisimetrice.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **1p**

Într–adevăr, fie $\varepsilon > 0$; există $a < x_0$ astfel încât $f(a) > L - \varepsilon$, deoarece $L = \sup\{f(x) \mid x < x_0\}$. Din monotonie rezultă $|f(x) - L| = L - f(x) < \varepsilon$, oricare ar fi $x \in (a, x_0)$, de unde $L = f(x_0 - 0)$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **1p**

Analog se arată că f are limită la dreapta în orice punct din $\mathbb{R}$.

b) Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi fie numerele $t, s, a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $t < a < x_0 < s < b$. Atunci $f(t) \leq f(a) \leq f(x_0) \leq f(s) \leq f(b)$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **1p**

Atunci $g(a) = \lim\limits_{t \nearrow a} f(t) \leq f(x_0)$ şi $g(b) = \lim\limits_{s \nearrow b} f(s) \geq f(x_0)$, adică

$$g(a) \leq f(x_0) \leq g(b).$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **2p**

Cum a, b sunt alese arbitrar, din continuitatea funcţiei g avem $g(x_0) = \lim\limits_{a \nearrow x_0} g(a) = \lim\limits_{b \searrow x_0} g(b)$, deci $g(x_0) \geq f(x_0) \geq g(x_0)$, adică $g(x_0) = f(x_0)$. Prin urmare $f = g$, de unde rezultă concluzia.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **2p**

Observaţie. Se pot acorda maximum 1 punct la a) şi maximum 2 puncte la b) dacă raţionamente intuitive sau pe un desen pot fi transcrise riguros în limbajul analizei matematice corecte.