OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a IX-a

SUBIECTUL 1.

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x-2\sqrt{x-2}+\left[x-\dfrac{2010}{671}\right]^2=1$

b) $\left[\left\{\dfrac{x-2}{3}\right\}-\dfrac{x-2}{3}\right]=\dfrac{1-3x}{5}$,

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a și $\{b\}$ reprezintă partea fracționară a numărului b.

GMB

SUBIECTUL 2.

Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ astfel încât $a+b+c\geq\dfrac{1}{abc}$. Demonstrați că $a^2+b^2+c^2\geq\sqrt{3}$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 3.

Fie paralelogramul ABCD și $M\in \operatorname{Int}[ABCD]$, cu $AB=a, BC=b$. Arătați că se poate construi un patrulater convex cu laturile de lungime MA, MB, MC, MD și diagonalele de lungime a și b.

Dorin Arventiev

SUBIECTUL 4.

Fie ABCDEF un hexagon convex. Fie H_1,H_2,H_3 ortocentrele ΔABC, ΔCDE și respectiv ΔEFA. Fie G_1,G_2,G_3 centrele de greutate ale ΔABC, ΔCDE și respectiv ΔEFA. Demonstrați echivalența:

ABCDEF inscriptibil $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{H_1H_2}=3\cdot\overrightarrow{G_1G_2}\\ \overrightarrow{H_2H_3}=3\cdot\overrightarrow{G_2G_3}\end{cases}$.

Nelu Chichirim

Notă:
Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a IX-a

<u>Barem de corectare și notare</u>

Subiectul 1. **a)** Ecuația este echivalentă cu $\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left[x-\frac{2010}{671}\right]^2=0$ **1p**

Deci $\sqrt{x-2}=1$ și $\left[x-\frac{2010}{671}\right]=0$ **1p**

Soluția $x=3$ **1p**

b) $\left[\left\{\frac{x-2}{3}\right\}-\frac{x-2}{3}\right]=\frac{1-3x}{5}\Leftrightarrow\left[-\left[\frac{x-2}{3}\right]\right]=\frac{1-3x}{5}\Leftrightarrow-\left[\frac{x-2}{3}\right]=\frac{1-3x}{5}\Leftrightarrow\left[\frac{x-2}{3}\right]=\frac{3x-1}{5}$ **1p**

Notăm $\left[\frac{x-2}{3}\right]=k,\ k\in\mathbf{Z}\Rightarrow\frac{3x-1}{5}=k\Rightarrow x=\frac{5k+1}{3}$

Așadar $k\le\frac{x-2}{3}<k+1\Leftrightarrow 3k\le\frac{5k+1}{3}-2<3k+3\Leftrightarrow k\in\{-2,\ -1\}$ **2p**

Deci soluția $x\in\left\{-3,\ -\frac{4}{3}\right\}$ **1p**

Subiectul 2. $a+b+c\ge\frac{1}{abc}\Leftrightarrow ab\cdot ac+ac\cdot bc+bc\cdot ab\ge 1$ **2p**

$(ab+ac+bc)^2\ge 3(ab\cdot ac+ac\cdot bc+bc\cdot ab)\ge 3\Rightarrow ab+ac+bc\ge\sqrt{3}$ **3p**

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac\ge\sqrt{3}$ **2p**

Subiectul 3. Construcția punctului M.. **4p**

Fie $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $[MP]\cap[CB]=\{O\}$. Patrulaterul MBPC verifică toate condițiile........**3p**

Subiectul 4.

$\Rightarrow$

Dacă ABCDEF inscriptibil, luăm O centrul cercului circumscris hexagonului, de unde rezultă $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right)-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3\cdot\overrightarrow{OG_2}-3\cdot\overrightarrow{OG_1}=3\cdot\overrightarrow{G_1G_2}$

.... **2p**

Analog: $\overrightarrow{H_2H_3}=3\cdot\overrightarrow{G_2G_3}$ **1p**

$\Leftarrow$

Fie O_1,O_2,O_3 centrele cercurilor circumscrise Δ ABC, Δ CDE și respectiv Δ EFA.......................... **1p**

$\overrightarrow{H_1H_2}=3\cdot\overrightarrow{G_1G_2}\Rightarrow\overrightarrow{H_1O_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2H_2}=3\left(\overrightarrow{G_1O_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2G_2}\right)\Rightarrow 2\cdot\overrightarrow{O_1O_2}=\vec{0}\Rightarrow O_1=O_2$ **1p**

$\overrightarrow{H_2H_3}=3\cdot\overrightarrow{G_2G_3}\Rightarrow O_2=O_3$ **1p**

De unde $O_1=O_2=O_3\overset{not}{=}O$.

$$\left.\begin{cases}O=O_1\Rightarrow OA=OB=OC\\ O=O_2\Rightarrow OC=OD=OE\\ O=O_3\Rightarrow OE=OF=OA\end{cases}\right\}\Rightarrow OA=OB=OC=OD=OE=OF\Rightarrow\text{ABCDEF inscriptibil.}$$ **1p**

<u>Notă</u> : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .