OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a VII-a

1. În triunghiul ABC dreptunghic în A, avem M mijlocul laturii (BC), E mijlocul lui (AM), iar $m\widehat{B} < m\widehat{C}$. Fie $MF \perp BE$, $F \in (BE)$, $MS \perp AB$, $S \in (AB)$. Arătaţi că
   (a) $AB < \frac{3}{2}BE$,
   (b) $4MF < 3MS$.

Camelia Postolache

2. Se dau numerele:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+2015} \\ b &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2014}\right) + \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + ... + \frac{2}{2014}\right) \\ &+ \left(\frac{3}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{3}{2014}\right) + ... + \left(\frac{2013}{2013} + \frac{2013}{2014}\right) + \left(\frac{2014}{2014}\right). \end{aligned}$$

Stabiliţi care dintre numerele $\sqrt{a-1}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{2ab}$ este raţional, justificând răspunsul.

Dorina Rapcea

3. În triunghiul ABC $(AB < AC)$, bisectoarea interioară a unghiului A intersectează latura BC în punctul D şi paralela prin C la AB în punctul E, iar mediana corespunzătoare laturii BC intersectează aceeaşi paralelă în punctul N. Fie M simetricul lui A faţă de B, O mijlocul lui $[BC]$ şi $\{P\} = MO \cap BN$. Aflaţi valoarea raportului $\frac{\mathcal{A}_{APM}}{\mathcal{A}_{BME}}$.

Sorina Stoian

4. (a) Arătaţi că oricare ar fi numerele reale a, b, c avem $|a+b| + |a+c| \geq |b-c|$.
   (b) Demonstraţi că pentru orice număr real x avem

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + ... + |x+2014| \geq 1007^2.$$

Gazeta Matematică 11/2014.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Clasa a VII-a

1. *În triunghiul ABC dreptunghic în A, avem M mijlocul laturii (BC), E mijlocul lui (AM), iar $m\widehat{B} < m\widehat{C}$. Fie $MF \perp BE$, $F \in (BE)$, $MS \perp AB$, $S \in (AB)$. Arătaţi că*
(a) $AB < \frac{3}{2}BE$,
(b) $4MF < 3MS$.
Soluţie.
(a)În ΔABC dreptunghic în A, AM mediană, deci $AM = \frac{BC}{2}$. **(1p)**
În ΔABE, $AB < AE + BE = \frac{BC}{4} + BE$, $4AB < BC + 4BE$.**(2p)**
Dar, $BC < BE + EC$, de unde $4AB < 5BE + EC$. Cum $m\widehat{B} < \widehat{C}$ avem $m\widehat{CME} < m\widehat{BME}$, rezultă $EC < BE$ şi $4AB < 6BE$, $AB < \frac{3}{2}BE$. **(1p)**
(b) Cum BE mediană în ΔABM, rezultă $\mathcal{A}_{\Delta BEM} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\Delta ABM}$ şi $2BE \cdot MF = AB \cdot MS$, **(1p)** sau $4 \cdot 3BE \cdot MF = 3 \cdot 2AB \cdot MS$. **(1p)**
Dar, $2AB < 3BE$, de unde $4MF < 3MS$. **(1p)**

2. *Se dau numerele:*

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+2015} \\ b &= \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2014}\Big) + \Big(\frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + ... + \frac{2}{2014}\Big) \\ &+ \Big(\frac{3}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{3}{2014}\Big) + ... + \Big(\frac{2013}{2013} + \frac{2013}{2014}\Big) + \Big(\frac{2014}{2014}\Big). \end{aligned}$$

Stabiliţi care dintre numerele $\sqrt{a-1}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{2ab}$ este raţional, justificând răspunsul.
Soluţie.

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + ... + \frac{2}{2015 \cdot 2016} \\ a &= 2\Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}\Big) \\ a &= 2\Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2016}\Big) = \frac{2015}{1008} \qquad \textbf{(2p)} \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + ... + \frac{1+2+...+2014}{2014} \\ b &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3} + ... + \frac{2014 \cdot 2015}{2 \cdot 2014} \\ b &= \frac{1+2+3...+2015}{2} = \frac{2015 \cdot 2016}{2 \cdot 2} = 2015 \cdot 504. \qquad \textbf{(2p)} \end{aligned}$$

Astfel, $\sqrt{a-1} = \sqrt{\frac{1007}{1008}}$. Cum $\frac{1007}{1008}$ fracţie ireductibilă, iar ultimele cifre ale numărătorului şi numitorului sunt 7, respectiv 8, rezultă că nici numitorul, nici numărătorul nu sunt pătrate perfecte, deci $\sqrt{a-1} = \frac{\sqrt{1007}}{\sqrt{1008}} \notin \mathbb{Q}$.**(1p)**
$\sqrt{b} = \sqrt{\frac{2015 \cdot 2016}{4}} = \frac{\sqrt{2015 \cdot 2016}}{2}$. Cum $2015 \cdot 2016$ este produs de numere consecutive, nu este pătrat perfect, deci $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$. **(1p)**
$\sqrt{2ab} = \sqrt{2 \cdot \frac{2015}{1008} \cdot 2015 \cdot 504} = \sqrt{2015^2} = 2015 \in \mathbb{Q}$. **(1p)**

3. *În triunghiul ABC $(AB < AC)$, bisectoarea interioară a unghiului A intersectează latura BC în punctul D şi paralela prin C la AB în punctul E, iar mediana corespunzătoare laturii BC intersectează aceeaşi paralelă în punctul N. Fie M simetricul lui A faţă de B, O mijlocul lui $[BC]$ şi $\{P\} = MO \cap BN$. Aflaţi valoarea raportului $\frac{\mathcal{A}_{APM}}{\mathcal{A}_{BME}}$.*
Soluţie.

Cum $ABNC$ paralelogram şi O mijlocul lui $[BC]$ avem $AO \equiv ON$. Deci, $[OM]$ mediană în ΔAMN. **(1p)**
Dar, $AB \equiv BM$ implică $[NB]$ mediană în ΔAMN. **(1p)**
Cum $MO \cap BN = \{P\}$, rezultă că P este centrul de greutate al ΔAMN, deci $\mathcal{A}_{AMP} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{AMN}$ (1). **(2p)**
Din $AM \| CE$, $N \in CE$, rezultă $\mathcal{A}_{BME} = \mathcal{A}_{BMN}$. **(1p)**
În ΔAMN, $[BN]$ mediană, deci $\mathcal{A}_{BME} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{AMN}$ (2). **(1p)**
Din (1) şi (2) se obţine $\frac{\mathcal{A}_{APM}}{\mathcal{A}_{BME}} = \frac{2}{3}$. **(1p)**

4.
(a) Arătaţi că oricare ar fi numerele reale a, b, c avem $|a+b| + |a+c| \geqslant |b-c|$.
(b) Demonstraţi că pentru orice număr real x avem

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + ... + |x+2014| \geqslant 1007^2.$$

Soluţie.
(a) Ştiind că $|x| + |y| \geqslant |x-y| \Longrightarrow |a+b| + |a+c| \geqslant |a+b-a-c| = |b-c|$. **(2p)**
(b) Aplicând, pe rând relaţia arătată la (a), obţinem

$$\begin{aligned}
|x+1| + |x+2014| &\geqslant |x+2014-x-1| = 2013, \\
|x+2| + |x+2013| &\geqslant |x+2013-x-2| = 2011, \\
.... &\ ...\ .... \\
|x+1007| + |x+1008| &\geqslant |x+1008-x-1007| = 1. \qquad \textbf{(2p)}
\end{aligned}$$

Însumând inegalităţile, obţinem:

$$|x+1| + |x+2| + ... + |x+2014| \geqslant 1 + 3 + ... + 2011 + 2013 = 1007^2, \qquad (\textbf{1p})$$

unde

$$\begin{aligned}
1 + 3 + ... + 2011 + 2013 &= (1 + 2 + ... + 2014) - (2 + 4 + ... + 2014) \\
&= \frac{2014 \cdot 2015}{2} - 2\frac{1007 \cdot 1008}{2} = 1007^2. \qquad (\textbf{2p})
\end{aligned}$$