OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a XII-a

1) Fie mulţimea M=$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f\ \textit{admite primitive}\ \text{şi}\ f^2(x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}\}$.

a) Să se arate că mulţimea M are 4 elemente ;

b) Să se determine mulţimea A=$\{\int f(x)dx \mid f\in M\}$.

Prelucrare GMB , supliment, nr. 10/2015

2) Se consideră grupul abelian G=(-1,1) cu legea de compoziţie „$*$" definită astfel :

x$*$y=$\frac{x+y}{1+xy}$, $\forall\, x,y\in(-1,1)$.

a) Demonstraţi că $f:(-1,1)\to\mathbb{R}_+^*$, f(x)= $\frac{1+x}{1-x}$ este izomorfism între grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$;

b) Calculaţi A $=\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\dots*\frac{1}{2016}$.

3) Să se calculeze I=$\int\frac{\cos^2 x+\cos x}{\sin x+\cos x+1}dx$, unde x$\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

4)Fie f : $\mathbb{R}\to G$, $f(x)=\frac{1-e^{kx}}{1+e^{kx}}$, $(k\in\ \mathbb{N}^*)$ un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(G,\circ)$.

a) Să se determine mulţimea G ;

b) Să se determine legea de compoziţie $\circ$

Subiectele au fost propuse de:
Prof. Alexandrov Eugen – C. Ec. „M. Kogălniceanu" Focşani
Prof. Preda Cătălin – C. N. „Unirea" Focşani

NOTĂ: **Timp de lucru: 3 ore.**
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a XII-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul 1:

a) M= $\{1_{\mathbb{R}}, -1_{\mathbb{R}}, f_3, f_4\}$, unde $f_3, f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = |x|$, $f_4(x) = -|x|$

(fără demonstraţie) **2p**

Demonstraţia acestui fapt **2p**

b) Fie $F_1, F_2, F_3, F_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivele celor patru funcţii .

$F_1(x) = \frac{x^2}{2} + C$,$\forall x \in \mathbb{R}$;$F_2(x) = -\frac{x^2}{2} + C$,$\forall x \in \mathbb{R}$ **1p**

$F_3(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases} + C$; $F_4(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x < 0 \\ -\frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases} + C$ .... **2×1p**.

Subiectul 2:

a) Injectivitatea ....**1p** Surjectivitatea ......**1p** Morfismul **2p**

b) f(A) = $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{1}{2016}\right)$ **1p**

f(A) = $\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2016}{2014} \cdot \frac{2017}{2015} = \frac{2016 \cdot 2017}{2}$ **1p**

$\frac{1+A}{1-A} = 1008 \cdot 2017 \Rightarrow A = \frac{1008 \cdot 2017 - 1}{1008 \cdot 2017 + 1}$ **1p**

Subiectul 3:

Considerăm integrala J=$\int \frac{sin^2x + sinx}{cosx + sinx + 1} dx$ **2p**

I+J=x+C **2p**

$I - J = \int \frac{cos^2x - sin^2x + cosx - sinx}{sinx + cosx + 1} dx = \int (cosx - sinx)dx = sinx + cosx +$ C... **2p**

$I = \frac{x+sinx+cosx}{2} + C$ ……………………………………………………..……………..….. **1p**

Subiectul 4:

a) f este izomorfism , deci f este bijectivă . Fie f(x)=y∈G …………………..…………... **1p**

Avem $e^{kx} = \frac{1-y}{1+y} > 0$ ……………………………………………………….…….. **1p**

Rezolvăm inecuaţia şi obţinem G=(-1,1) ….………………………………….….. **1p**

b) Inversa lui f este izomorfism .

Pentru x , y ∈ G , avem $f^{-1}(x \circ y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$…..…….. **1p**

Determinarea inversei $f^{-1}: G \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{1}{k} \cdot ln\frac{1-y}{1+y}$ ………………………….. **1p**

x∘ $y =$ ……..= $\frac{x+y}{1+xy}$, $\forall\, x, y \in G.$ ………………………………………………………….**2p**

NOTĂ. Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.