Olimpiada Naţională de Matematică
Faza Locală Dâmboviţa – 23 Februarie 2014

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru e și H un subgrup propriu al lui G.

i) Dacă $a \in G \setminus H$, notăm $aH = \{ah \mid h \in H\}$. Demonstrați că $H \cap aH = \emptyset$.

ii) Dacă G e comutativ și $a \in G \setminus H$ satisface $a^2 = e$, atunci $K = H \cup aH$ este subgrup al lui G.

Gazeta Matematică 1986

Subiectul 2. Fiind dată funcția $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ cu coeficienții $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

să se arate că o primitivă a funcției $\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$, unde k este o constantă reală, este

$$F(x) = \frac{1}{2}(f(x) + a_1x + a_0) + k(f'(x) - a_2x - a_1).$$

Gazeta Matematică 1956

Subiectul 3. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Gazeta Matematică 1966

Subiectul 4. Calculaţi

$$I = \int_0^1 \left(\{2x\} - \frac{1}{2}\right)\left(\{3x\} - \frac{1}{2}\right) dx.$$

Gazeta Matematică 2013

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

BAREM

CLASA A XII-A

Subiectul 1. $H \cap aH = \emptyset$ **(3p)**; K parte stabila **(2p)**; existenta simetricului **(2p)**.

Subiectul 2. $\frac{f(x)-f(k)}{x-k} = a_2x + a_1 + ka_2$ **(3p)**; $F(x) = \frac{1}{2}a_2x^2 + (a_1 + ka_2)x + a_0$ **(3p)**; finalizare **(1p)**.

Subiectul 3. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ **(1p)**; $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ **(1p)**; $= \pi/4$ **(2p)**; $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ **(1p)**; $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ **(1p)**; $= \pi/4$ **(1p)**

Subiectul 4. $\int_0^1 = \int_0^{1/3} + \int_{1/3}^{1/2} + \int_{1/2}^{2/3} + \int_{2/3}^{1}$ **(3p)**; pentru calculul corect al acestor integrale se acorda cate **(1p)**.