OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA a VI– a

BAREM

Problema 1. a) Fie numerele x, y, z şi $t \in \mathbb{N}$ care îndeplinesc condiţia :

$7x + 5y - 2z - 2t = 0$. Să se arate că numărul $n = (11x + 9y) \cdot (z + t - x)$ este divizibil cu 10.

Soluţie. Din relaţia dată avem că : $7x + 5y = 2(z + t) \Longrightarrow (7x + 5y) \vdots 2$

Dar $4x + 4y = 4(x + y) \vdots 2$, şi atunci adunând obtinem $(11x + 9y) \vdots 2 \Longrightarrow n \vdots 2$.......................1p

Din nou $2x + 5x + 5y - 2z - 2t = 0 \Rightarrow 5(x + y) = 2(z + t - x) \Longrightarrow 2(z + t - x) \vdots 5$..............1p

Dar 2 şi 5 sunt prime între ele şi atunci $(z + t - x) \vdots 5 \Rightarrow n \vdots 5$..1p

În concluzie, cum $n \vdots 2$ şi $n \vdots 5 \Rightarrow n \vdots 10$..1p

b) Să se arate că fracţia :

$\frac{n^2 + 3}{2n^4 + 7n^2 + 4}$, este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Arătăm că $(n^2 + 3, 2n^4 + 7n^2 + 4) = 1$. Fie d un divizor comun al celor două numere.

Atunci $\begin{cases} d | n^2 + 3 \\ d | 2n^4 + 7n^2 + 4 \end{cases}$..1p

Înmultim primul număr cu $2n^2$ şi avem că : $\begin{cases} d | 2n^4 + 6n^2 \\ d | 2n^4 + 7n^2 + 4 \end{cases}$ şi prin diferenţă avem că $d | n^2 + 4$...........1p

Din nou $\begin{cases} d | n^2 + 4 \\ d | n^2 + 3 \end{cases}$ şi prin diferenţă obţinem că $d | 1 \Rightarrow d = 1$, de unde fracţia este ireductibilă. 1p

Problema 2. a) Punctul C este mijlocul segmentului (AB), D este mijlocul lui (BC), E este mijlocul lui (CD), iar F este un punct situat pe semidreapta $(EB$ astfel încât $(EB) \equiv (BF)$. Dacă $EB = 3$ cm calculaţi AF.

Soluţie. Se poate nota $ED = x$ şi avem succesiv că $CD = BD = 2x$ şi $EB = BF = 3x$. Cum $EB = 3$ cm avem că $x = 1$ cm...1p

Dar $AB = CB = 4x \Longrightarrow AC = 4$ cm...1p

Atunci $AF = 4\ cm + 2\ cm + 2\ cm + 3\ cm = 11\ cm$...1p

b) Se consideră două unghiuri adiacente $\angle AOB$ şi $\angle BOC$ de măsuri 108°, respectiv 68°. Semidreptele $[OM, [ON, [OP$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle AOB, \angle BOC$, respectiv $\angle MON$. Pe semidreapta opusă lui $[OP$ se consideră punctul D, iar în interiorul unghiului $\angle AOD$ alegem punctul E astfel încât $m(\angle EOD) = 10^\circ$. Arătaţi că punctele B, O, E sunt coliniare.

Soluţie. $m(\angle AOC) = 176^\circ$...1p

$m(\angle AOP) = 98^\circ$ 1p

$m(\angle BOP) = 10^\circ$..1p

Dar P, O, D sunt coliniare şi $\angle BOP \equiv EOD \Longrightarrow B, O, E$ coliniare. 1p

Problema 3. Se consideră pe un cerc 100 de puncte, iar în fiecare punct se scrie la întâmplare câte un număr natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricăror 4 numere scrise în 4 puncte consecutive de pe cerc să fie mai mică decat 203 ? Justificaţi răspunsul !

Solutie. Notăm cele 100 de numere naturale $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ eventual în altă ordine, corespunzătoare celor 100 de puncte de pe cerc.

Presupunem că suma oricăror 4 numere aflate în 4 puncte consecutive de pe cerc au suma mai mică decât 203..1p

Atunci au loc relaţiile :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 202 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 202 \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 202 \\ \dots \\ a_{99} + a_{100} + a_1 + a_2 \leq 202 \\ a_{100} + a_1 + a_2 + a_3 \leq 202 \end{cases}$$ 1p

Adunând cele 100 de relaţii obţinem că
$4(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}) \leq 20200 \Longrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} \leq 5050$..
....1p

Dar suma $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$...1p

Atunci în cele 100 de relaţii trebuie să avem egalitate, fiecare fiind egală cu 202. ....1p

Cum $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \Longrightarrow a_1 = a_5$, ceea ce contrazice faptul că numerele sunt distincte. 1p

În concluzie cerinţa problemei nu poate fi îndeplinită. 1p

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA a VI– a

1. a) Fie numerele $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ care îndeplinesc condiţia : $7x+5y-2z-2t=0$. Să se arate că numărul $n=(11x+9y)\cdot(z+t-x)$ este divizibil cu 10.

b) Să se arate că fracția $\frac{n^2+3}{2n^4+7n^2+4}$ este ireductibilă $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. a) Punctul C este mijlocul segmentului (AB), D este mijlocul lui (BC), E este mijlocul lui (CD), iar F este un punct situat pe semidreapta $(EB$ astfel încât $(EB)\equiv(BF)$. Dacă $EB=3$ cm calculaţi lungimea segmentului (AF).

b) Se consideră două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ de măsuri 108°, respectiv 68°. Semidreptele $[OM$, $[ON$, $[OP$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$ respectiv $\sphericalangle MON$. Pe semidreapta opusă lui $[OP$ se consideră punctul D, iar în interiorul unghiului $\sphericalangle AOD$ alegem punctul E astfel încât $m(\sphericalangle EOD)=10^\circ$. Arătaţi că punctele B, O, E sunt coliniare.

3. Se consideră pe un cerc 100 de puncte, iar în fiecare punct se scrie la întâmplare câte un număr natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricăror 4 numere scrise în 4 puncte consecutive de pe cerc să fie mai mică decât 203 ? Justificaţi răspunsul !

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 2 ore.
Subiectele au fost propuse şi selectate de către:
prof. Andrei Bretan, Şcoala Gimnazială „Nicolae Iorga“, Baia Mare.
prof. Cosmin Pop, Şcoala Gimnazială „George Coşbuc“, Baia Mare.

SUCCES