OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a V-a

Problema 1. Fie x şi y două numere naturale nenule astfel încât $2015^x - 2013 = x + y$.
Verificaţi dacă y este pătrat perfect, ştiind că:

$$3x + 6x + 9x + ... + 102x = 3570.$$

Graţiela Popa, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

$3x \cdot (1 + 2 + ... + 34) = 3570$ .... (1p)

$x = 2$ .... (2p)

$y = 2014 \cdot 2015$ .... (2p)

Justificarea faptului că y nu este pătrat perfect ($2014^2 < y < 2015^2$ sau alt mod) .... (2p)

Problema 2. Un număr natural de trei cifre împărţit la răsturnatul său dă câtul 2 şi restul 100, iar diferenţa dintre cifra sutelor şi cifra unităţilor numărului este egală cu 4. Aflaţi numărul.

Mihai Ilie, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

$\overline{abc} = 2 \cdot \overline{cba} + 100$ .... (2p)

$98a = 10b + 199c + 100$ .... (1p)

$a = c + 4 \Rightarrow 10b + 101c = 292$ .... (2p)

$b = 9,\ c = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 692$ .... (2p)

Problema 3. Fie A un număr natural care nu se divide cu 5 şi B câtul împărţirii lui A la 5. Notăm cu $u(A)$ ultima cifră a lui A. Arătaţi că dacă $u(A) < 5$ atunci B este număr par, iar dacă $u(A) > 5$, atunci B este număr impar.

Ion Voicu, Gazeta Matematică nr. 10/2014

Soluţie şi barem de corectare

Fie k câtul împărţirii lui A la 10; atunci $A = 10k + u(A)$ .... (2p)

Notând cu r restul împărţirii lui A la 5, rezultă $A = 5B + r$, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ .... (1p)

Dacă $u(A) < 5$, atunci restul împărţirii lui A la 5 este $u(A)$, deci $5B + u(A) = 10k + u(A)$, de unde rezultă că $B = 2k$, adică B este par .... (2p)

Dacă $u(A) > 5$, atunci restul împărţirii lui A la 5 este $u(A) - 5$, deci $5B + u(A) - 5 = 10k + u(A)$, de unde rezultă că $B = 2k + 1$, adică B este impar .... (2p)

Problema 4. Pe o farfurie pătrată, cu lungimea laturii de 25 cm, se aşază biscuiţi de formă dreptunghiulară, cu lungimea de 4 cm şi lăţimea de 2 cm, fără a depăşi marginile farfuriei. Biscuiţii vin în pachete de câte 15 bucăţi.

a) Arătaţi că oricum am aşeza biscuiţii din 5 pachete, aceştia nu pot acoperi complet farfuria.

b) Arătaţi că dacă pe farfurie se pun biscuiţii din 16 pachete, există cel puţin 4 biscuiţi care se suprapun (nu neapărat complet).

Marius Perianu,Slatina

Soluţie şi barem de corectare

a) Aria farfuriei este de $25\times25=625\ \text{cm}^2$ .... (1p)

Dacă nu se suprapun, biscuiţii dintr-un pachet acoperă $15\times2\times4=120\ \text{cm}^2$ .... (1p)

Rezultă că biscuiţii din 5 pachete acoperă cel mult 600 cm^2, deci nu acoperă complet farfuria .... (1p)

b) Biscuiţii din 16 pachete acoperă o suprafaţă de 1920 cm^2 .... (2p)

Aşezând biscuiţii pe cel mult 3 „straturi”, aceştia ar trebui să acopere de cel mult trei ori suprafaţa farfuriei, adică $3\times625=1875\ \text{cm}^2<1920\ \text{cm}^2$, deci există cel puţin 4 biscuiţi care se suprapun .... (2p)