COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2013

Clasa a X-a

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $(f\circ f)(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) funcția *f* este bijectivă;

b) funcția *f* nu este strict monotonă;

c) $f(0)=0$.

2. Pentru $a,b\in(0,1)$, arătați că are loc inegalitatea $\log_a \frac{2ab}{a+b}\cdot\log_b\frac{2ab}{a+b}\geq 1$.

3. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc de rază 1, iar M un punct oarecare pe cerc. Demonstrați că $MA^2+MB^2+MC^2=6$.

4. Dacă m, n sunt numere naturale cel puțin egale cu 2, demonstrați că

$$\frac{1}{2\sqrt[m]{1}}+\frac{1}{3\sqrt[m]{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt[m]{n}}<m.$$

Subiect elaborat de prof. Gabriela Zanoschi

Clasa a X-a

1. a) Dacă funcția compusă $g \circ h$ este injectivă, atunci *h* este injectivă, iar dacă $g \circ h$ este surjectivă, atunci *g* este surjectivă. În cazul nostru, $f \circ f$ este bijectivă, prin urmare *f* este atât injectivă, cât şi surjectivă.

b) Compusa a două funcții strict monotone este funcție strict crescătoare, în timp ce funcția $x \mapsto -x$ este strict descrescătoare, deci *f* nu poate fi strict monotonă.

c) Din ipoteză, rezultă că $-f(x) = f\left(f\left(f(x)\right)\right) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci funcția *f* este impară, de unde $f(0) = 0$.

2. Din inegalitatea mediilor MH≤MG, obținem că $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$. Cum funcția logaritmică de bază subunitară este strict descrescătoare, deducem că $\log_a \frac{2ab}{a+b} \ge \frac{1}{2}\log_a ab$, respectiv $\log_b \frac{2ab}{a+b} \ge \frac{1}{2}\log_b ab$. Rămâne să dovedim că $\log_a ab \cdot \log_b ab \ge 4$, fapt care revine la $\log_a b + \log_b a \ge 2$, iar această inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor MG≤MA.

3. Considerăm un reper cu originea în centrul *O* al cercului circumscris triunghiului şi notăm cu m, a, b, c afixele punctelor M, A, B respectiv *C*. Evident că $|m| = |a| = |b| = |c| = 1$ şi, cum triunghiul *ABC* este echilateral, $a + b + c = 0$. Atunci:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \sum |m-a|^2 = \sum \left(|m|^2 + |a|^2 - m\overline{a} - \overline{m}a\right) =$$

$$= 3|m|^2 + \sum |a|^2 - m \cdot \overline{a+b+c} - \overline{m}(a+b+c) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 + 0 = 6.$$

4. Majorăm termenul general al sumei: $\frac{1}{(k+1)\sqrt[m]{k}} = \sqrt[m]{k^{m-1}} \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \sqrt[m]{k^{m-1}}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$

$$= \sqrt[m]{k^{m-1}}\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k^{m-1}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[m]{(k+1)^{m-1}}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right)\left(1 + \ldots + \sqrt[m]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{m-1}}\right) <$$

$< \left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right) \cdot m$. Rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt[m]{k}} < m \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right) = m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}\right) < m.$$