limpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XI-a M_1

Problema 1

Se consideră determinantul $f(x)=\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a} \end{vmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

- **a)** Pentru ce valori ale lui $a\in\mathbb{R}$, ecuaţia $f(x)=0$ are soluţii reale?
- **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $f(x)=0$ are toate soluţiile numere reale strict negative.

Problema 2

Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi $A,B\in M_n(\mathbb{Q})$ două matrice cu proprietatea că $A+B=AB$. Arătaţi că pentru orice $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, proprietăţile următoare sunt echivalente:

1) $A+B+B^2+\ldots+B^{k-1}=O_n$.

2) $B^k=O_n$.

Problema 3

Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^4+k}}\right)^{n^2+1}$.

Problema 4

Să se determine în funcţie de $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XI-a M_2

Problema 1

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. Să se determine domeniul maxim de definiție şi asimptotele la graficul funcției.

Problema 2

Să se determine $x \in \mathbb{R}$ poentru care $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Problema 3

Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x^2 - 1)}{\operatorname{tg}(x^3 - 1)} \cdot \dfrac{e^{x^2-1} - 1}{x^4 - 1}.$

Problema 4

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$

a) Să de calculeze $\det(A + 3I_3).$

b) Să se verifice dacă $A^5 + 4A = O_3.$

c) Să se calculeze $A + A^5 + A^9 + \ldots + A^{2013}.$

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 15.02.2014
Clasa a XI-a M_1

Soluţii şi bareme

1. a) Dezvoltând determinantul obţinem: $f\left(x\right)=e^{2x^2+2x+2a}+2e^{-x^2-x-a}-3=e^{2\left(x^2+x+a\right)}+\dfrac{2}{e^{\left(x^2+x+a\right)}}-3$ ……2p

Notând : $e^{\left(x^2+x+a\right)}=t>0$, ecuaţia $f\left(x\right)=0$ devine :

$t^2+\dfrac{2}{t}-3=0\Leftrightarrow\dfrac{t^3-3t+2}{t}=0\Leftrightarrow\dfrac{\left(t-1\right)^2\left(t+2\right)}{t}=0\Leftrightarrow\left(t-1\right)^2\left(t+2\right)=0\Rightarrow t_1=1>0;t_2=-2<0$ 1p

Revenind la notaţie, vom avea : $e^{\left(x^2+x+a\right)}=1\Rightarrow x^2+x+a=0\left(*\right)$.

Ecuaţia are soluţii reale $\Leftrightarrow\Delta\geq 0\Leftrightarrow 1-4a\geq 0\Leftrightarrow a\in\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$. 1p

a) Ecuaţia $f\left(x\right)=0$ are toate soluţiile strict negative $\Leftrightarrow$ ecuaţia $\left(*\right)$ are soluţiile x_1,x_2 strict negative.....1p

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geq 0\\ S<0 \text{ unde } S=x_1+x_2=-1;P=x_1\cdot x_2=a\ \Rightarrow\\ P>0\end{cases}$$ 1p

$$\begin{cases}a\in\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]\\ -1<0\quad\text{adevarat}\Leftrightarrow a\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right].\\ a\in\left(0,\infty\right)\end{cases}$$

. ...1p

2. 1)$\Rightarrow$2) $A+B+B^2+\ldots+B^{k-1}=O_n\,\big|\cdot B\Rightarrow AB+B^2+...+B^{k-1}+B^k=O_n\overset{AB=A+B}{\Rightarrow}\underbrace{A+B+B^2+...+B^{k-1}}_{O_n}+B^k=O_n\Rightarrow B^k=O_n$ …..3p

2)$\Rightarrow$1) Ştim că $B^k=O_n,\forall k\in\mathbb{N},k\geq 2$.Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice afirmaţia de la (1) 1p

$P\left(k\right):A+B+B^2+...+B^{k-1}=O_n,\forall k\in\mathbb{N},k\geq 2$

$I)\,P(2):A+B=O_n\ de\ \ verificat$

$O_n=B^2=AB^2=\left(AB\right)B\overset{AB=A+B}{=}\left(A+B\right)B=AB+B^2\overset{B^2=O_n}{=}AB=A+B\Rightarrow A+B=O_n\Rightarrow P(2)$ adevărat. 1p

$II) P(k) \to P(k+1)$

$P(k): A+B+B^2+\ldots+B^{k-1}=O_n$, pentru $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$ fixat , ipoteză de inducţie

$P(k+1): A+B+B^2+\ldots+B^{k-1}+B^k=O_n$, trebuie demonstrat

Din $P(k)\Rightarrow A+B+\ldots+B^{k-1}=O_n \,\Big|+B^k\left(=O_n\right)\Rightarrow A+B+B^2+\ldots+B^{k-1}+B^k=O_n \Rightarrow P(k+1): A+B+B^2+\ldots+B^{k-1}+B^k=O_n$ adevărat. 2p

3. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^4+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k+1}{\left(k^4+k\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k+1}{k\left(k^3+1\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cancel{k^2-k+1}}{k(k+1)\cancel{\left(k^2-k+1\right)}}=$$ 2p

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$ 2p

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^4+k}}\right)^{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}\right)^{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{\frac{-\left(n^2+1\right)}{n(n+1)}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$ 3p

4. $$\lim_{x\to\infty}x^{\sim}\left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}x^{\sim}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}x^{\sim}\left(\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right)=$$ 2p

$$=\lim_{x\to\infty}x^{\sim}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}x^{\sim}\left(\frac{\sqrt{x-1}+\cancel{\sqrt{x}}-\sqrt{x+1}-\cancel{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}\right)=$$ 1p

$$=\lim_{x\to\infty}x^{\sim}\left(\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}\right)=$$ 1p

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^{\sim}}{x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}\overset{not}{=}l$$ 2p

Discuţie:

1) Pentru $\sim<\frac{3}{2}\Rightarrow l=0$ 2) Pentru $\sim=\frac{3}{2}\Rightarrow l=-\frac{1}{4}$ 3) Pentru $\sim>\frac{3}{2}\Rightarrow l=-\infty$ 1p

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XI-a M_2

Soluţii şi bareme

1. $D=\mathbb{R}\Rightarrow$ nu există asimptote verticale. Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty \Rightarrow$ nu există asimptote orizontale . ……2p

Studiem existenţa asimptotei oblice la $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x}=-1\ ,$$ …….1p

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{\downarrow\ \infty}+\underbrace{x}_{\downarrow\ -\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2}-x}=\frac{2}{\infty}=0\ ,$$ ……1p

deci $y=-x$ asimptotă oblică la $-\infty$. ……0,5p

Studiem existenţa asimptotei oblice la $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x}=1,$$ …….1p

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{\downarrow\ \infty}-\underbrace{x}_{\downarrow\ \infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2}+x}=\frac{2}{\infty}=0,$$ …….1p

deci $y=x$ asimptotă oblică la $+\infty$. ……0,5p

2. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 2\\ 1 & 2 & x\\ 2 & x & 1\end{vmatrix}\overset{L_1\to L_1+L_2+L_3}{=}\begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3\\ 1 & 2 & x\\ 2 & x & 1\end{vmatrix}=(x+3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & x\\ 2 & x & 1\end{vmatrix}=(x+3)\cdot\left(2+x+2x-4-x^2-1\right)==(x+3)\cdot\left(-x^2+3x-3\right)$$ ……4p

Cum determinantul este nul $\Leftrightarrow$ $(x+3)\cdot\left(-x^2+3x-3\right)=0$, adică $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ ..….1p

sau $-x^2+3x-3=0$, dar $\Delta=-3<0$ şi ecuaţia nu are soluţii reale. Deci $S=\{-3\}$. ……2p

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{\operatorname{tg}\left(x^3-1\right)}\cdot\frac{e^{x^2-1}}{x^4-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\overbrace{\boxed{\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-1}}}^{\nearrow 1}\cdot\cancel{(x-1)}\,(x+1)}{\underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{tg}\left(x^3-1\right)}{x^3-1}}}_{\searrow 1}\cdot\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}\cdot\frac{\overbrace{\boxed{\frac{e^{x^2-1}-1}{x^2-1}}}^{\nearrow 1}\cdot\cancel{\left(x^2-1\right)}}{\cancel{\left(x^2-1\right)}\left(x^2+1\right)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$ ……..7p

4. **a**) $\det\left(A+3I_3\right)=\begin{vmatrix}4&0&-1\\0&3&0\\1&0&4\end{vmatrix}=48+3=51.$ …….2p

b) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$, $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&0&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$, $A^5=A^3\cdot A^2=\begin{pmatrix}-4&0&4\\0&0&0\\-4&0&-4\end{pmatrix}$ şi ……1p

$A^5+4A=\begin{pmatrix}-4&0&4\\0&0&0\\-4&0&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&-4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3.$ …..1p

c) Din (b) $\Rightarrow A^5+4A=O_3\Rightarrow A^5=-4A,\ A^9=A^5\cdot A^4=-4A^5=(-4)^2A,\ A^{13}=A^9\cdot A^4=(-4)^2A^5=(-4)^3A,\ldots,A^{2013}=(-4)^{503}A,\Rightarrow$ …..1p

$A+A^5+A^9+\ldots+A^{2013}=A+(-4)A+(-4)^2A+\ldots+(-4)^{503}A=\left[1+(-4)+(-4)^2+\ldots+(-4)^{503}\right]A=$ ……1p

$=\frac{(-4)^{504}-1}{-4-1}A=\frac{1-4^{504}}{5}A.$ ……1p