OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALA - 21.02.2016

CLASA A IX A

SOLUȚII ȘI BAREME

Subiectul 1.

a) Arătaţi că $n^4 > (n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ **, unde n este un număr natural nenul……………………………..…………………………………………………………..……..2p**

b) Calculaţi $[S]$**, unde** $S = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ... + \frac{1}{2016^4}$ **, unde** $[S]$ **reprezintă partea întreagă a lui S………………………………………………...…………………………....5p**

Prof. Drugan Constantin, Constantinescu Dragoş
C.N. „Alexandru Lahovari '',Rm. Vâlcea

Barem :

a) După calcule se ajunge la $2\cdot n^2 + n > 2$, $n \geq 1$ evident……………………….2p

b) Din a) avem că $\frac{1}{n^4} < \frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)} =$

$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n} - \frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}\right)$, $n \geq 3$,natural …………………………………….2p

Avem 1<S=$\sum_{k=1}^{2016}\frac{1}{k^4} < 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3} - \frac{1}{2015\cdot2016\cdot2017}\right)$……………………………….2p

1<S<2 , deci $[S]$=1……………………………………………………………………………………1p

Subiectul II

a) Arătaţi că în orice triunghi ABC are loc relaţia $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,unde O este centrul cercului circumscris triunghiului iar H este ortocentrul triunghiului..3p.

b) Fie ABCD un patrulater înscris în cercul de centru O şi care are diagonalele AC şi BD perpendiculare. Dacă H_1 şi H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD şi ABC, arătaţi că $\overrightarrow{BH_2}=\overrightarrow{DH_1}$ 4p

Prof. Drugan Constantin, Constantinescu Dragoş
C.N. „Alexandru Lahovari '',Rm. Vâlcea

Barem :

a) Relaţia este binecunoscuta relaţie a lui Sylvester.
Luăm cazul unui triunghi oarecare ABC , D este diametral opus lui A în cercul circumscris şi P este mijlocul laturii BC 1p
Patrulaterul BHCD are laturile opuse paralele deci este paralelogram,atunci diagonala HD şi latura BC au acelaşi mijloc P. Cum ,în triunghiul AHD
$\overrightarrow{AH}=2\cdot\overrightarrow{OP}$ iar OB=OC avem $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\cdot\overrightarrow{OP}$ ....1p.
$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$ deci $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ 1p

b) Aplicăm relaţia lui Sylvester pentru triunghiurile ACD şi ABC 1p
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OH_1}$ respectiv $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH_2}$ 1p
$\overrightarrow{OH_1}-\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}$, deci $\overrightarrow{H_2H_1}=\overrightarrow{BD}$ 1p

Cum punctele B ,D , H_1 şi H_2 sunt pe aceeaşi dreaptă rezultă concluzia..........1p

Subiectul III

a) Câte progresii aritmetice de numere naturale există cu primul termen 1 şi care conţin numărul 45001 ?...2p
b) Arătaţi că nu există progresii aritmetice neconstante de numere naturale cu toţi termenii pătrate perfecte...5p

Prof. Drugan Constantin, Constantinescu Dragoş
C.N. „Alexandru Lahovari '',Rm. Vâlcea

Barem :

a) Fie (a_n) o progresie aritmetică cu primul termen 1 şi care conţine numărul 45001. Atunci $45001 = 1+(n-1)\cdot r \Rightarrow (n-1)\cdot r = 45000$, deci r este divizor al lui 45000...1p

$45000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ .Deci $r = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^k, i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2}, k = \overline{0,4}$

r poate lua $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ de valori ,adică sunt 60 de progresii..........................1p

b) Presupunem prin absurd că (a_n) este o progresie aritmetică în care toţi termenii sunt pătrate perfecte .Atunci există şirul strict crescător

$(x_n), cu\ \ a_n = x_n^2$ unde n este nr. natural nenul 2p

Cum $x_{n+1}^2 - x_n^2 = r$ avem $x_{n+1} - x_n \geq 1 \Rightarrow r = (x_{n+1} - x_n)\cdot(x_{n+1} + x_n) \geq 2\cdot x_n$ 2p

Rezultă că şirul (x_n) este mărginit , fals deorece (a_n) nu este mărginit..............1p

Subiectul IV.

Fie a,b,c numere reale strict pozitive. Demonstraţi că :

$$a^2+b^2+c^2+\frac{a^2}{(b+c)^4}+\frac{b^2}{(a+c)^4}+\frac{c^2}{(a+b)^4}\geq\frac{3}{2}.$$

G.M. Nr 5/2015

Barem :

Se pleacă de la $a^2+\frac{a^2}{(b+c)^4}\geq\frac{2\cdot a^2}{(b+c)^2}$ şi se obţine 2p

$$\sum a^2+\sum\frac{a^2}{(b+c)^4}\geq 2\cdot\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2$$ 1p

Aplicăm inegalitatea C.B.S. şi obţinem

$$\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\geq\frac{1}{3}\cdot\left(\sum\frac{a}{b+c}\right)^2$$ 2p

Cum $\sum\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}$ este o inegalitate cunoscută 1p

Se obţine ingalitatea cerută....................................1p