# Olimpiada de matematică
# Etapa locală, 28.02.2015
# Clasa a X-a

**Subiecte:**

1. Fie $x, a, b, c > 1$. Să se arate că numerele $\log_{bc} x$, $\log_{ac} x$, $\log_{ab} x$ sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă $(\log_x a)^2, (\log_x b)^2, (\log_x c)^2$ sunt în progresie aritmetică.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f\big(f(x)\big) = x + 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

   a) Să se găsească o funcție care verifică relația din enunț.
   b) Să se arate că $f(x+1) = f(x) + 1, \forall\ x \in \mathbb{R}$.
   c) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ nu este injectivă.

3. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{\sqrt{5^x + 12^x}} + \sqrt{x+7} = \frac{14}{13} + \sqrt{x+2}$$

4. Dacă $u, v \in \mathbb{C}$, să se demonstreze inegalitatea:

$$|1 + \bar{u}v|^2 \leq (1 + |u|^2)\,(1 + |v|^2)\,.$$

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.*
*La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.*

**Barem clasa a X-a**

1. $2\log_{ac} x = \log_{bc} x + \log_{ab} x \iff \frac{2}{\log_x a + \log_x c} = \frac{1}{\log_x b + \log_x c} + \frac{1}{\log_x a + \log_x b} \iff \frac{2}{\log_x a + \log_x c} = \frac{\log_x a + 2\log_x b + \log_x c}{(\log_x b + \log_x c)(\log_x a + \log_x b)}$................$2p$

   Egalând produsele pe diagonală, după reduceri rezultă relația:

   $2(\log_x b)^2 = (\log_x a)^2 + (\log_x c)^2$..........................................$5p$

2. a) Putem considera $f$ de forma $f(x) = ax + b$ și va rezulta $a^2x + ab + b = = x + 1 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. De exemplu , $a = 1$ și $b = \frac{1}{2}$ verifică, $f(x) = x + \frac{1}{2}$ ...........................................................................$2p$.

   b) $f\left(f(x)\right) = x + 1 \implies f\left(f\left(f(x)\right)\right) = f(x+1)$ (1)
   Înlocuind în relația din enunț $x$ cu $f(x)$ rezultă $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = f(x) + 1$ (2).
   Din (1) și (2) rezultă $f(x+1) = f(x) + 1$....................................$2p$

   c) $g(0) = f(0)$
   $g(1) = f(1) - 1$

   Din relația de la b), pentru $x = 0 \implies f(1) = f(0) + 1$, deci $f(1) - 1 = f(0)$
   Deci $g(0) = g(1)$ și $g$ nu este injectivă.........................................$3p$

3. $\frac{1}{\sqrt{5^x + 12^x}} + \sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} = \frac{14}{13}$ sau $\frac{1}{\sqrt{5^x + 12^x}} + \frac{5}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2}} = \frac{14}{13}$......$2p$

   $x = 2$ verifică ecuația, iar funcția din membrul stâng este strict descrescătoare deci $x = 2$ este singura soluție...............................................$5p$

4. Folosind relația $|z|^2 = z\ \bar{z}$ inegalitatea se mai scrie :
   $(1 + \bar{u}v)(1 + u\bar{v}) \leq (1 + u\bar{u})(1 + v\bar{v}) \iff 1 + (u\bar{v} + \bar{u}v) + u\bar{u}\, v\bar{v} \leq 1 + + u\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{u}\, v\bar{v}$ ........................................................$5p$
   (toți termenii din membrul stâng sau drept sunt numere reale, fiind sume sau produse de numere complexe conjugate). Reducând, se ajunge la

$(u-v)\,(\bar{v}-\bar{u})\ \leq 0$ sau $-(u-v)\,(\bar{u}-\bar{v}) = -(u-v)\cdot\overline{(u-v)} =$
$= -|u-v|^2\ \leq 0$ ..........................................................$2p$

Observație.Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.