OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA
13.02.2014

Clasa a X-a

1. Fie $M \subset \mathbb{C}$ o mulţime care satisface proprietăţile:

i) $0 \in M$;
ii) $x \in M \Rightarrow (\cos x + i \sin x) \in M$;
iii) $(\cos 2x + i \sin 2x) \in M \Rightarrow x \in M$.

Să se arate că:

a) M conţine cel puţin 3 numere întregi;
b) M conţine o infinitate de numere iraţionale;
c) M conţine o infinitate de numere complexe nereale;

2. Să se determine $x, y \in \mathbb{Q}$ care verifică $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -11x + 2y$ şi $\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 2x + 11y$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\log_a[x] = [\log_a x],\ a \in \mathbb{N}, a \geq 2$.

4. Fie $a > 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ şi sistemul $\begin{cases} a^{x_1} + a^{x_2} + \cdots + a^{x_{n-1}} = n - a^2 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = n - 1 \end{cases}$.

Arătaţi că dacă sistemul are soluţie, atunci $a \leq 1$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este de 3 ore.

BAREM OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA
13.02.2014
Clasa a X-a

1. Fie $M \subset \mathbb{C}$ o mulţime care satisface proprietăţile:

i) $0 \in M$;
ii) $x \in M \Rightarrow (\cos x + i \sin x) \in M$;
iii) $(\cos 2x + i \sin 2x) \in M \Rightarrow x \in M$.

Să se arate că:

a) M conţine cel puţin 3 numere întregi;
b) M conţine o infinitate de numere iraţionale;
c) M conţine o infinitate de numere complexe nereale;

Barem: a) $cos0 + i \sin 0 \in M \Longrightarrow \ 1 \in M$ ... $1p$

$1 = cos2\pi + i \sin 2\pi \in M \Longrightarrow \pi \in M \Longrightarrow \ cos\pi + i \sin \pi \in M \Longrightarrow -1 \in M$ ... $2p$

b) $1 = cos2k\pi + i \sin 2k\pi \in M, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \ k\pi \in M, \forall\, k \in \mathbb{Z}$ ... $1p$

c) $cos\pi + i \sin \pi \in M \ \Longrightarrow \ \frac{\pi}{2} \in M \ \Longrightarrow \ cos\frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \in M$ ... $1p$

Demonstraţia prin inducţie: $cos\frac{\pi}{2^n} + i \sin \frac{\pi}{2^n} \in M, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ ... $2p$

2. Să se determine $x, y \in \mathbb{Q}$ care verifică $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -11x + 2y$ şi $\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 2x + 11y$.

GM

Barem :

Se consideră $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. Observăm că $z^{-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} i$ ... *1p*

$z^{-2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{x^2+y^2} i$ ... *1p*

Se înmulţeşte cu $(-i)$ a doua ecuaţie şi se adună cu prima, după care se rescrie ecuaţia obţinută folosind pe z.

$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{x^2+y^2} i = -11x + 2y - 2xi - 11yi$ ... *2p*

$z^{-1} = -(11 + 2i)z \ \Longrightarrow \ z^3 = -\frac{1}{11+2i} \ \Longrightarrow \ z^3 = \left(\frac{1-2i}{5}\right)^3$ ... *2p*

Soluţii raţionale se obţin numai pentru $z = \frac{1-2i}{5}$, $\quad x = \frac{1}{s}, y = -\frac{2}{5}$ ... *1p*

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\log_a[x] = [\log_a x], \ a \in \mathbb{N}, a \geq 2$.

Barem: Condiţii de existenţă: $x \in [1, +\infty)$ ... *1p*

$log_a^{[x]} = [log_a^x] = k \ \Longrightarrow k \in \mathbb{N}$ ... *1p*

$\begin{cases} [x] = a^k \\ k \leq log_a^x \leq k+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^k \leq x < a^k + 1 \\ a^k \leq x < a^{k+1} \end{cases}$ ... $2p$

$a^k + 1 \le a^{k+1}\ pentru\ a \ge 2\ şi\ k \in \mathbb{N} \implies x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [a^k, a^k + 1)$ ... $3p$

4. Fie $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$ şi sistemul $\begin{cases} a^{x_1} + a^{x_2} + \cdots + a^{x_{n-1}} = n - a^2 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = n - 1 \end{cases}$.

Arătaţi că dacă sistemul are soluţie, atunci $a \le 1$.

Barem :

$a^{x_1} + a^{x_2} + \cdots + a^{x_n} \ge (n-1)\sqrt[n-1]{a^{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}} = (n-1)\sqrt[n-1]{a^{n-1}} = (n-1)a$ **...** $4p$

$n - a^2 \ge (n-1)a, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \ge 3$ **...** $2p$

$a \in [0,1)$ **...** $1p$