Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a VII- a

Subiecte :

1. Numerele întregi a și b verifică inegalitatea $a^2 + b^2 \leq 5$.
   a) Arătați că $-2 \leq a \leq 2$.
   b) Arătați că $-3 \leq a + b \leq 3$.

2. Numărul real x verifică ecuația $\left|\sqrt{7} - \left|x - \sqrt{3}\right|\right| = \sqrt{5}$.
   a) Să se determine numărul soluțiilor ecuației.
   b) Să se ordoneze crescător soluțiile ecuației.

3. Fie $ABCD$ un pătrat și punctele $M \in (AB), N \in (BC)$. Perpendiculara în D pe DN intersectează dreapta AB în P.
   a) Demonstrați că triunghiul DNP este isoscel.
   b) Știind că $m(\sphericalangle MDN) = 45^\circ$, arătați că $AM + CN = MN$.

Prof. Negreanu Pantelimon, Alexandria

4. În triunghiul ABC, $[AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in (BC)$, E mijlocul lui $[AC]$ și $DF \| BE$, $F \in (AC)$, $\{M\} = AD \cap BE$. Să se arate că:

   a) $\dfrac{EF}{FC} = \dfrac{AB}{AC}$.

   b) $\dfrac{BM}{ME} = \dfrac{2EF}{FC}$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.Timp de lucru : 3 ore .
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem cls. a VII-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv .

1. a) $b^2 \geq 0$, $a^2 \leq a^2 + b^2 \leq 5$, $a \in \mathbb{Z}$ și $a^2 \leq 5$ deci $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ……………………………………………………………………… ……..3 p

   b) În mod asemănător $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, deci $-4 \leq a + b \leq 4$. Dacă $a + b = 4$ sau -4, ar rezulta $a = b = 2$ sau $a = b = -2$, care nu mai verifică inegalitatea din enunț, deci $-3 \leq a + b \leq 3$ (de exemplu $a = -1, b = -2$ verifică inegalitatea și $a + b = -3$, iar $a = 1, b = 2$ verifică inegalitatea și $a + b = 3$) ………………………………………………………… 4 p

2. a) Rezultă $\sqrt{7} - |x - \sqrt{3}| = \sqrt{5}$ sau $\sqrt{7} - |x - \sqrt{3}| = -\sqrt{5}$.
   Dacă $|x - \sqrt{3}| = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ rezultă $x - \sqrt{3} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ sau $x - \sqrt{3} = -\sqrt{7} + +\sqrt{5}$, iar dacă $|x - \sqrt{3}| = \sqrt{7} + \sqrt{5}$ rezultă $x - \sqrt{3} = -\sqrt{7} - \sqrt{5}$ sau $x - \sqrt{3} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$, deci 4 soluții……………………………………..4 p

   b) $-\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{3}$, $-\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$, $\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{3}, \sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$ ………………………………………………………………………………..3 p

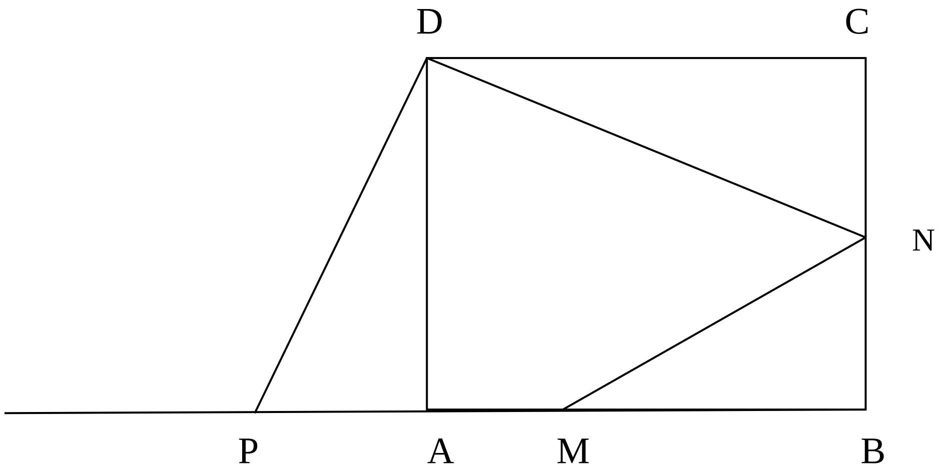
3. a) Rezultă $\sphericalangle CDN \equiv \sphericalangle ADP$ (au $\sphericalangle ADN$ complement comun), iar $[AD] \equiv [DC]$, deci $\Delta\, ADP \equiv \Delta\, CDN$(fiind triunghiuri dreptunghice) și $[DP] \equiv [DN]$……….4 p

   b) Dacă $m(\sphericalangle MDN) = 45^\circ$ rezultă $m(\sphericalangle MDP) = 45^\circ$ și $\Delta\, DPM \equiv \Delta\, DNM$ (LUL), deci $[MN] \equiv [PM]$. ………………………………………………2 p
   $MN = PM = AM + AP = AM + CN$, (din $\Delta\, ADP \equiv \Delta\, CDN, [AP] \equiv [CN]$)
   Deci $MN = AM + CN$……………………………………………………1 p

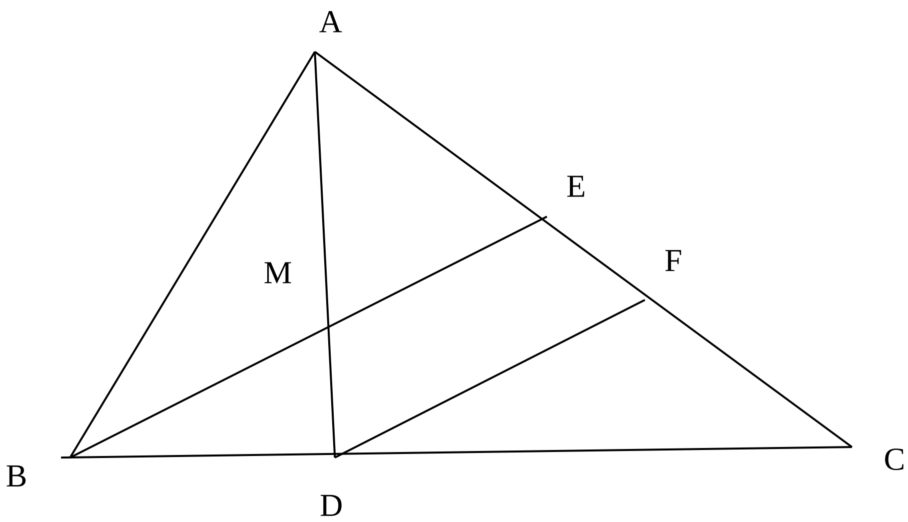
4. a) Din teorema lui Thales și teorema bisectoarei rezultă
   $\frac{EF}{FC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$……………………………………………………3 p

   b) Aplicând teorema bisectoarei în triunghiul ABE rezultă $\frac{BM}{ME} = \frac{AB}{AE}$, iar $AE = \frac{AC}{2}$, deci $\frac{BM}{ME} = \frac{2AB}{AC} = \frac{2EF}{FC}$, folosind egalitatea de la a)………… 4 p

3.



4.



Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro