Olimpiada naţională de matematică, faza locală, judeţul Caraş-Severin, 2016

Clasa a XI-a

I. Se notează cu a,b,c lungimile laturilor unui triunghi, iar cu h_a, h_b, h_c lungimile înălţimilor şi se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & a & h_a\cdot h_b \\ 1 & b & h_b\cdot h_c \\ 1 & c & h_c\cdot h_a \end{pmatrix}$. Arătaţi că $\det A\geq 0$. În ce condiţii avem $\det A=0$? .

Lucian Dragomir, Supliment GM 12/2014

II. Se consideră $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det(A-I_2)=2$ şi $\det(A+I_2)=4$. Calculaţi $\det A$ şi $\det(A-2I_2)$.

RMCS 34

III. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}, n\geq 0, x_0=1$.

Calculaţi:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

RMCS nr. 39

IV. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ şi, pentru orice număr natural nenul n, se notează $a_n=\lim\limits_{x\to 0}(1-x\cdot\sin nx)^{f(x)}$.

Calculaţi :

a) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot(e^{x^2}-\cos 3x))$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

***

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada naţională de matematică
Etapa locală, 5 martie 2016, Caraş - Severin

Clasa a XI a (Barem de corectare și notare)

1.

$\det A=\begin{vmatrix} 1 & a & \frac{4S^2}{ab} \\ 1 & b & \frac{4S^2}{bc} \\ 1 & c & \frac{4S^2}{ca}\end{vmatrix}=\frac{4S^2}{abc}\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b\end{vmatrix}$	**(3p)**
$\begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b\end{vmatrix}=\sum a^2-\sum ab\geq 0$	**(3p)**
$\det A=0 \Leftrightarrow a=b=c$	**(1p)**

2.

Folosim egalitatea $\det(A-x\cdot I_2)=x^2-(trA)\cdot x+\det A$ şi deducem imediat: $\det A-trA=1$, $\det A+trA=3$	**(4p)**
$\det A=2, trA=1$, de unde $\det(A-2I_2)=4$.	**(3p)**

3.

a)Se arată, prin inducţie matematică, că $x_n>0, \forall n\geq 0$. Atunci, $x_{n+1}-x_n=\frac{4}{x_n}>0 \Rightarrow$ şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ ar fi mărginit superior, deci convergent, trecând la limită, ar rezulta: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\frac{4}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$, contradicţie. Urmează $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$	**(4p)**
b) Aplicând criteriul Stolz –Cesaro, avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}^2-x_n^2\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{16}{x_n^2}\right)=8$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=2\sqrt{2}$.	**(3p)**

4.		
	a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos 3x}{x^2}\right)=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}=\frac{11}{2}$	**3p**
	b) $a_k=e^{-k}$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=\frac{1}{e-1}$	**2p**