



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XII-a

1. Fie funcția $f: Z_9 \rightarrow Z_9$, $f(x) = x^2$. Să se determine submulțimile nevide A ale mulțimii Z_9 cu proprietatea $f(A) = A$.

GM 9/2014

2. Pe R se consideră legea de compoziție $x * y = 2015xy - 2014x - 2014y + 2014$, $x, y \in R$.

a) Să se arate că $*$ este asociativă;

b) Să se afle $\alpha \in R$ astfel încât $x * x \geq \alpha$, pentru orice $x \in R$;

c) Să se calculeze $\frac{1}{2015} * \frac{2}{2015} * \dots * \frac{2015}{2015}$.

3. Fie $f: R \rightarrow R$ o funcție care admite o primitivă neinjectivă. Să se arate că există $a, b \in R$ $a \neq b$ astfel încât $f(a) + 2f(b) = 0$.

4. Să se calculeze $\int \frac{\sin x}{e^x + \sin x + \cos x} dx$, $x \in (0, +\infty)$.

NOTĂ:

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.