OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
21.02.2016

BAREM
CLASA A VII-A

Subiectul I

a) $a=\dfrac{403}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{1\cdot 6}+\frac{5}{6\cdot 11}+\frac{5}{11\cdot 16}+...+\frac{5}{2011\cdot 2016}\right)}$ 1p

$a=\dfrac{403}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2016}\right)}$

Finalizare $a=2016$ 1p

$b=\sqrt{350+2\cdot(1+2+3+...+349)}$

$b=\sqrt{350+349\cdot 350}$ 1p

Finalizare $b=350$ 1p

$mg=\sqrt{a\cdot b}$

$mg=840$ 1p

b) $\left(\sqrt{\frac{x-5}{10}}-\sqrt{\frac{x-10}{5}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x-6}{9}}-\sqrt{\frac{x-9}{6}}\right)=0$

Dacă $10\le x<15$ parantezele sunt strict pozitive. Dacă $x>15$, parantezele sunt strict negative.
Deci $x=15$..2p
..

Subiectul II

a) Aplicând inegalitatea $mg\le ma$ pentru numerele a şi b+c, b şi a+c, respective c şi a+b obţinem:

$\sqrt{a(b+c)}\le\frac{a+b+c}{2}=1008$, $\sqrt{b(a+c)}\le\frac{a+b+c}{2}=1008$, $\sqrt{c(a+b)}\le\frac{a+b+c}{2}=1008$...2p

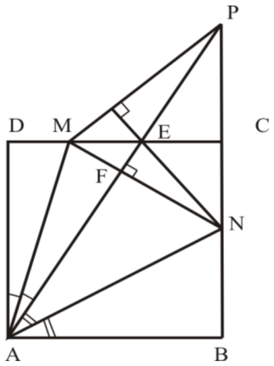
Adunând inegalităţile obţinute, membru cu membru, se gaseşte inegalitatea cerută.....................1p

b) După calcule, numărul se scrie ca 1000(a+b+c)/9...1p

Folosind scrierea anterioară, pentru ca numărul să fie rațional, trebuie ca 10(a+b+c) sa fie pătrat perfect, adică a+b+c să fie de forma $10k^2$..1p

Cum a,b,c sunt cifre, a+b+c=10. Tripletele ca in cerință sunt (1,2,7), (1,3,6), (1,4,5), (2,3,5).
Deci sunt 4 numere: 127, 136, 145 şi 235..2p

Subiectul III



Desen………………………………………………………………………………….1p

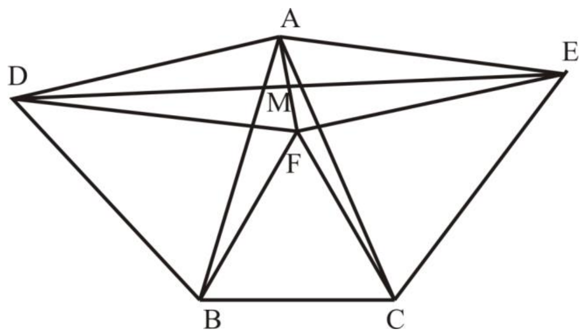
Deoarece MC ⊥ NP iar NE ⊥ PM rezultă că E este ortocentrul triunghiului MNP şi prin urmare PE ⊥ MN, adică AP ⊥ MN……………………………………………………2p

Notăm cu {F} = AP ∩ MN.

ΔABN ≡ Δ AFN ([AN] ≡ [AN], ∠NAB ≡ ∠ NAF)(i.u) prin urmare [AB] ≡ [AF] şi cum [AB] ≡ [AD] rezultă că [AF] ≡ [AD]……………………………………………2p

ΔADM ≡ Δ AFM ([AM] ≡ [AM], [AD] ≡ [AF]) (i.c) de unde ∠DAM ≡ ∠ FAM adică AM este bisectoarea unghiului DAF…………………………………………………2p

Subiectul IV



Desen……………………………………………………………………………..1p

Deoarece [AM] ≡ [MF] iar [DM] ≡ [ME] rezultă că ADFE este paralelogram, prin urmare [AD] ≡ [EF], [AE] ≡ [AD], ∠ADF ≡ ∠ AEF şi cum m(∠ADB) = m(∠AEC) = 60° rezultă că ∠FDB ≡ ∠ FEC………………………………………………………………1p

ΔFDB ≡ Δ CEF ([FD] ≡ [CE], ∠FDB ≡ ∠ CEF, [DB] ≡ [EF]) aşadar [FB] ≡ [FC] **(1)**……………………………………………………………………………………1p

Din paralelogramul ADFE avem că m(∠DAE) + m(∠ADF) = 180°, relatie care se mai scrie sub forma:

m(∠DAB) + m(∠BAC) + m(∠CAE) + m(∠ADF) = 180° şi cum

m(∠DAB) = 60° iar m(∠CAE) = 60° vom obţine că:

m(∠BAC) + m(∠ADF) = 60°

Dar şi m(∠BDF) + m(∠ADF) = 60°, ceea ce arată că ∠BAC ≡ ∠ BDF…………………..2p

ΔBAC ≡ Δ BDF ([BA] ≡ [BD], ∠BAC ≡ ∠ BDF, [AC] ≡ [DF]), aşadar [BC] ≡ [BF] **(2)**..1p

Din **(1)** şi **(2)** rezultă că [BC] ≡ [BF] ≡ [CF] ceea ce demonstrează că triunghiul FBC este isoscel……………………………………………………………………………..1p

Orice rezolvare corectă se punctează complet.