OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 21.02.2016

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1

a) Fie x,y $\in$ R, $\left|x-\frac{1}{2}\right| \le \frac{3}{2}$, $\left|y-\frac{1}{2}\right| \le \frac{3}{2}$. Știind că $\sqrt{(2-x)(y+1)}+\sqrt{(2-y)(x+1)}=3$, arătați că x + y = 1.

b) Se dau numerele a = $1+\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+\ldots+\sqrt{2^{2015}}$ și
b = $-1+\sqrt{2}-\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}-\ldots+\sqrt{2^{2015}}$. Arătați că $c=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ este număr natural.

SUBIECTUL 2

Aflați cardinalul mulțimii:

$$A = \left\{ \overline{abc} \,/\, \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{4}} - \frac{2c\sqrt{8}}{\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{12}} = \frac{-3}{\sqrt{2}} ;\ a \ne b \ne c \right\}$$

prof. Nicolae Jurubiță

SUBIECTUL 3

Fie pătratele ABCD și ABEF cu AB = 1m, astfel încât EC = $\sqrt{2}m$. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O,r)$, circumscris patrulaterului CDFE și se trasează diametrul cercului HI, H,I$\in$ $\mathcal{C}(O,r)$, HI$\perp$CD și OI$\cap$CD={M}. Dacă HG$\perp$(ABC) și IQ$\perp$(ABC), unde G,Q$\in$(ABC), să se determine lungimea razei r și aria poligonului AGBCQD.

prof Mihai Pîrvu

SUBIECTUL 4

Fie triunghiul echilateral ABC și punctele M,N,D astfel încât M$\in$(AB), N$\in$(AC), D$\notin$(ABC) și AM = CN = $\frac{1}{3}$BC iar AD $\perp$(ABC). Arătați că BN$\perp$PD unde {P}=NB$\cap$MC.

Notă:
Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 21.02.2016
Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) $\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{3}{2}\Rightarrow -1\le x\le 2\Rightarrow 2-x\ge 0, x+1\ge 0$

$\left|y-\frac{1}{2}\right|\le\frac{3}{2}.\Rightarrow -1\le y\le 2\Rightarrow 2-y\ge 0, y+1\ge 0$..**1p**

Din inegalitatea mediilor rezultă $\sqrt{(2-x)(y+1)}+\sqrt{(2-y)(x+1)}\le\frac{2-x+y+1}{2}+\frac{2-y+x+1}{2}$

$\frac{2-x+y+1}{2}+\frac{2-y+x+1}{2}\ge 3$ **1p**

Egalitatea are loc pentru $2-x=y+1, 2-y=x+1\Rightarrow x+y=1$.........................**1p**

b) a=$1+\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2015}}\,\big|\,\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}a=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2015}}+\sqrt{2^{2016}}$

Scădem cele două relații și obținem: $a=\frac{2^{1008}-1}{\sqrt{2}-1}$...**1p**

b=$-1+\sqrt{2}-\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2015}}\,\big|\,(-\sqrt{2})\Rightarrow -b\sqrt{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2015}}-\sqrt{2^{2016}}$

Scădem cele două relații și obținem $b=\frac{2^{1008}-1}{\sqrt{2}+1}$...**1p**

$\frac{a}{b}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2, \frac{b}{a}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ **1p**

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=6\in\mathbb{N}$ **1p**

SUBIECTUL 2

Raționalizând obținem $a\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)-b\left(\sqrt{3}-1\right)-c\left(2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{2}$............**3p**

$(a+b-2c)-\sqrt{3}(a+b-2c)+\sqrt{2}(a-2c)=-3\sqrt{2}$...**1p**

$(a+b-2c)\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}(a-2c)=-3\sqrt{2}$...**1p**

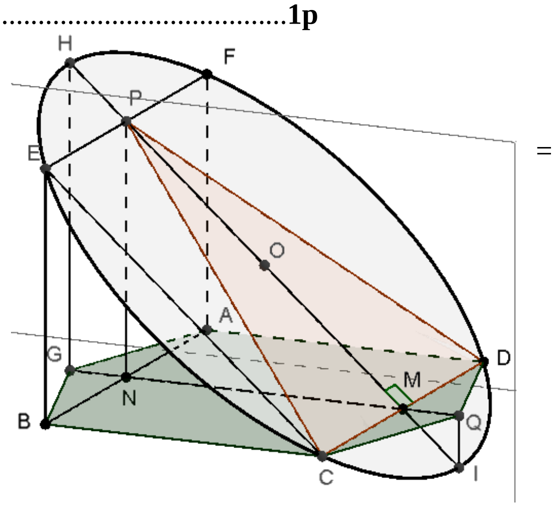
$a+b-2c=0$ și $a-2c=-3\Rightarrow b=3$

$2c=a+3$, a impar, $a\in\{1,3,5,7\}$ **1p**

Strudierea cazurilor și aflarea $A=\{132,534,735,936\}$ si

$card\ A=4$............**1p**

SUBIECTUL 3



Dacă ABCD și ABEF sunt pătrate cu AB = 1m ⟹ AB = EF = CD 1m , AB ∥ EF ∥ CD și AB⊥(BCE). ***(1)*** **1p**

Deoarece *BE = BC= 1m* şi *EC =* $\sqrt{2}m$,atunci BE⊥BC ***(2)***

Din *(1)* și *(2)* rezultă CDFE dreptunghi, deci există $\mathcal{C}(O,r)$, astfel

încât $CF\cap DE=\{O\}$ şi $r=\frac{1}{2}DE$. ***(3)***................**1p**

Se calculează DE=$\sqrt{3}$ și din ***(3),*** rezultă $r=\frac{\sqrt{3}}{2}m$..........**1p**

Fie HI⊥CD și OI∩CD={M} şi cum H,I∈ $\mathcal{C}(O,r)$, atunci H∈(MO,

astfel încât *HI= DE=* $\sqrt{3}\,m$ și *OH= OI =* $\frac{\sqrt{3}}{2}m$, iar

$CM=MD=\frac{1}{2}m$. ***(4)***.......................................**1p**

Notăm $HI\cap EF=\{P\}$ și cum HI⊥CD, CDFE dreptunghi și *(4)*, atunci $EP=PF=\frac{1}{2}m$.

Fie G, N, şi Q proiecţiile punctelor H, P şi respectiv I pe planul (ABC). **1p**

Se demonstrează că N∈(GM) şi Q∈(NM, astfel încât pe mediatoarea MN a segmentului [CD] se pot determina

NM =1m și $GN=MQ=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}m$. **1p**

Se justifică natura poligonului și se calculează aria cerută adică, $A_{AGBCQD}=\frac{2+\sqrt{6}}{4}m^2$. **1p**

SUBIECTUL 4

Demonstează că $\Delta AMC \equiv \Delta CNB$...**1p**

m($\widehat{ACM}$)=m($\widehat{NBC}$)=x^0 și m($\widehat{BPC}$)=120^0

m($\widehat{BPC}$)= m($\widehat{MPN}$)=120^0..**1p**

m($M\widehat{A}N$)+ m($\widehat{MPN}$)=180^0=> AMPN patrulater inscriptibil,..................................**1p**

AM =$\frac{AN}{2}$, m($\hat{A}$)=60^0 =>ΔAMN dreptunghic în M.. **1p**

$\widehat{AMN} \equiv \widehat{APN}$=>AP⊥PN...**1p**

Din T.3 ⊥=>DP⊥BN..**2p**

<u>**Notă**</u> **: Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim**