Olimpiada națională de matematică, faza locală, județul Caraș-Severin, 2016

Clasa a X-a

I. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg\left(1+x^2\right)=\log_3 x$.

Supliment GM 5/2015

II. Determinaţi valoarea minimă a lui $|z|$, dacă $z\in\mathbb{C}$ şi $|z-3\cdot i|+|z-4|=5$.

Călin Ciprian, Colegiul Național “Traian Lalescu” Reșița

III. a) Determinaţi funcţiile injective $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care

$$f(3^x-1+f(y))=\log_3(2x+1)+f(y)\quad,\ \forall x\in[0,\infty), y\in\mathbb{R}$$

b) Studiaţi dacă există funcţii bijective $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(3^x)-f^2(2x+1)\geq\frac{1}{4}\quad,\ \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

RMCS

IV. Determinaţi mulţimea M a numerelor reale strict pozitive x pentru care $[\log_4 x]$, $[\log_3(x+1)]$ şi $[\log_2(x+2)]$ sunt, în această ordine, numere naturale consecutive ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a).

RMCS 38

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada naţională de matematică
Etapa locală, 5 martie 2016, Caraş - Severin

Clasa a X a (Barem de corectare și notare)

1.

Din $\lg\left(1+x^2\right)=\log_3 x \overset{not.}{=} t$ se ajunge la $10^t=1+x^2$ şi $3^t=x$, de unde $10^t=1+9^t$	**(3p)**
Putem scrie $1=\left(\frac{1}{10}\right)^t+\left(\frac{9}{10}\right)^t$; cum funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(t)=\left(\frac{1}{10}\right)^t+\left(\frac{9}{10}\right)^t$ este strict descrescătoare, se ajunge imediat la unica soluţie $t=1\Rightarrow x=3$	**(4p)**

2.

Determinaţi valoarea minimă a lui $\lvert z\rvert$, dacă $z\in\mathbb{C}$ şi $\lvert z-3\cdot i\rvert+\lvert z-4\rvert=5$	**(7p)**
Fie $A(3i), B(4), M(z)$ $AB=\lvert 4-3i\rvert=\sqrt{25}=5$ $AM=\lvert z-3i\rvert$; $BM=\lvert z-4\rvert$;	**(2p)**
Deci, $AM+MB=AB\Longrightarrow M\in[AB]$	**(2p)**
$\lvert z\rvert=\min\Longrightarrow d(O,AB)=OM=\lvert z\rvert$	**(2p)**
Finalizare $OM=\frac{12}{5}$	**(1p)**

3.

Facem $x=0$ şi ajungem la $f(y)=y, \forall y\in\mathbf{R}$	**(3p)**
$x=0, x=1\Rightarrow f(1)=f(3)$ **,** deci f nu este injectivă	**(4p)**

4.

Soluţie: Condiţia din enunţ conduce la : $\begin{cases} k\le\log_4 x<k+1 \\ k+1\le\log_3(x+1)<k+2 \\ k+2\le\log_2(x+1)<k+3 \end{cases}$, unde $k\in\mathbb{N}$. Deducem astfel: $\begin{cases} 4^k\le x<4^{k+1} \\ 3^{k+1}\le x+1<3^{k+2} \\ 2^{k+2}\le x+2<2^{k+3} \end{cases}$ (1)	**(3p)**
Se demonstrează imediat prin inducţie matematică inegalitatea $4^n>2^{n+3}-2,\ \forall n\ge 3$. Se deduce astfel că pentru $k\ge 3$ avem $x\ge 4^k>2^{k+3}-2>x$	**(2p)**
Se ajunge aşadar la $k\in\{0,1,2\}$; notăm cu $M_k, k=\overline{0,2}$, mulţimea soluţiilor sistemului (1) şi se obţin $M_o=[2,4), M_1=[8,14), M_2=[26,30)\Rightarrow M=M_o\cup M_1\cup M_2$.	**(2p)**