

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ București
- ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -

CLASA A VIII-A

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Demonstrați că dacă a, b și n sunt numere naturale nenule astfel încât $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = n$, atunci

numărul $A = \underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + 2}}}}}}_{2014 \text{ radicali}}$ este natural.

2. Se consideră expresia $E(a, b) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{16ab}{a^2 + b^2}$, unde a și b sunt numere reale strict pozitive.

a) Arătați că numărul $E(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ este rațional;

b) Determinați cel mai mare număr real n pentru care inegalitatea $E(a, b) \geq n$ are loc, oricare ar fi numerele reale strict pozitive a și b .

3. Se consideră triunghiul echilateral ABC și triunghiul BCD situate în plane perpendiculare. Fie M mijlocul segmentului $[AD]$ și G centrul de greutate al triunghiului ABC .

Dacă $DG \perp (MBC)$, demonstrați că triunghiul BCD este dreptunghic isoscel.

4. Arătați că, dacă a, b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza a , atunci

a) $\frac{a}{\sqrt{bc}} \geq \sqrt{2}$;

b) $\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)} \leq 17 - 12\sqrt{2}$.

Problema 4 a fost selectată din *Suplimentul Gazetei Matematice*- Seria B nr.10 /2013, publicație lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Științe Matematice din România

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
- ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -

CLASA A VIII-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Demonstrați că dacă a, b și n sunt numere naturale nenule astfel încât $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = n$,

atunci numărul $A = \underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + 2}}}}}}_{2014 \text{ radicali}}$ este natural.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	Barem asociat
Ridicând la pătrat relația din ipoteză obținem $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = n^2 - 2 \in \mathbb{N}$.	2p
Putem considera $(a, b) = 1$. Frația $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ este ireductibilă, deci $a = b = 1$.	3p
Obținem $n = 2$.	1p
Finalizare, $A = 2 \in \mathbb{N}$	1p

Subiectul 2. Se consideră expresia $E(a, b) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{16ab}{a^2 + b^2}$, unde a și b sunt numere reale strict pozitive.

a) Arătați că numărul $E(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$ este rațional;

b) Determinați cel mai mare număr real n pentru care inegalitatea $E(a, b) \geq n$ are loc, oricare ar fi numerele reale strict pozitive a și b .

Prof. Traian Preda, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $E(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1) = 36 \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.	2p
b) Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 - 8 \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2} \geq n - 10$. Adică $(a-b)^2 \cdot \frac{(a^2 + b^2)(a+b)^2 - 8a^2b^2}{a^2b^2(a^2 + b^2)} \geq n - 10$.	2p
Deoarece $a^2 + b^2 \geq 2ab$ și $(a+b)^2 \geq 4ab$, obținem, prin înmulțire $(a^2 + b^2)(a+b)^2 \geq 8a^2b^2$. Deci $E(a, b) - 10 \geq 0$, oricare ar fi numerele reale strict	2p

pozitive a și b . Deducem că $n \geq 10$.	
Cum $E(a, a) = 10$, $a > 0$, rezultă că $n = 10$.	1p

Subiectul 3. Se consideră triunghiul echilateral ABC și triunghiul BCD situate în plane perpendiculare. Fie M mijlocul segmentului $[AD]$ și G centrul de greutate al triunghiului ABC . Dacă $DG \perp (MBC)$, demonstrați că triunghiul BCD este dreptunghic isoscel.

Prof. Mircea Fianu, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie N mijlocul segmentului $[BC]$. Punctele A , G și N sunt coliniare și $AN \perp BC$ (1) Cum $DG \perp (MBC)$, rezultă că $DG \perp BC$ (2) Din (1) și (2) deducem că $BC \perp (AND)$, deci dreapta DN este mediatoarea a segmentului $[BC]$, prin urmare, triunghiul BDC este isoscel cu $DB = DC$.	2p
În triunghiul dreptunghic AND avem $NM = \frac{AD}{2}$ (3). Dacă P este mijlocul segmentului $[AG]$ și $\{R\} = DG \cap MN$, atunci $[PM]$ este linie mijlocie în triunghiul ADG , de unde deducem că $[GR]$ este linie mijlocie în triunghiul NPM , deci R este mijlocul segmentului $[MN]$. Cum $DR \perp MN$, rezultă că triunghiul DMN este isoscel cu $DN = DM = \frac{AD}{2}$ (4) Din (3) și (4) obținem că triunghiul MDN este echilateral.	3p
Triunghiurile ANC și AND sunt congruente (C. U.), deci $ND = NC = \frac{BC}{2}$, adică triunghiul DBC este dreptunghic în D .	2p

Subiectul 4. Arătați că, dacă a , b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza a , atunci

- a) $\frac{a}{\sqrt{bc}} \geq \sqrt{2}$;
b) $\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)} \leq 17 - 12\sqrt{2}$.

Prof. Valerian Vlăescu, Dorohoi

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Prin ridicare la pătrat, inegalitatea devine $\frac{a^2}{bc} \geq 2$, sau $a^2 \geq 2bc$, adică $b^2 + c^2 \geq 2bc$. Ultima inegalitate este adevărată deoarece este echivalentă cu $(b-c)^2 \geq 0$.	2p
b) $a^2 = b^2 + c^2$, obținem $a-b = \frac{c^2}{a+b}$ și $a-c = \frac{b^2}{a+b}$. Inegalitatea din enunț devine $\frac{b^2 c^2}{(a+b)^2 (a+c)^2} \leq (3-2\sqrt{2})^2$, adică $\frac{bc}{(a+b)(a+c)} \leq 3-2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$.	2p
Inegalitate echivalentă cu $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{c}+1\right)} \leq \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}$ sau $\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{c}+1\right) \geq (\sqrt{2}+1)^2$. Avem $\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{c}+1\right) = \frac{a^2}{bc} + \frac{a}{bc}(b+c) + 1 \geq \frac{a^2}{bc} + \frac{2a}{\sqrt{bc}} + 1 = \left(\frac{a}{\sqrt{bc}}+1\right)^2 \geq (\sqrt{2}+1)^2$	3p