Ministerul Educației Naționale
Inspectoratul Şcolar Județean Vrancea
Centrul Metodic Focşani I

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală -09.02.2013
Clasa a VI-a

<u>Subiectul 1</u> Se dă mulțimea $M = \{1, 6, 11, 16, \dots 2001\}$ şi N o submulțime a lui M cu 203 elemente.

a) Să se arate că oricare ar fi submulțimea N, suma elementelor sale nu este pătrat perfect.

b) Să se arate că există în N două elemente a căror sumă este 2012.

GMB Nr.9/2012

<u>Subiectul 2</u> a) Demonstrați că dacă $s = 1 + 4 + 16 + \cdots + 4^{2015}$, atunci $3s + 1$ este pătrat perfect şi cub perfect.

b) Dovediți că suma $3 + 6 + 9 + \cdots + 2013$ nu este nici pătrat perfect, nici cub perfect.

Profesor Mirela Novetschi

<u>Subiectul 3</u> Unghiul $< AOB$ are măsura triplul măsurii unghiului $< BOC$. Semidreapta $(OD$ este opusă semidreptei $(OB$. Dacă $m(< AOC) = 120^0$, atunci calculați $m(< AOD)$.

GMB Nr.11/2011

<u>Subiectul 4</u> Considerăm segmentul $[AB]$ de lungime $1m$.

Notăm P_1 mijlocul segmentului $[AB]$ şi A_1 mijlocul segmentului $[P_1B]$.

Alegem P_2 astfel încât B să fie mijlocul segmentului $[A_1P_2]$.

Notăm P_3 mijlocul segmentului $[A_1B]$ şi A_3 mijlocul segmentului $[P_3B]$.

Alegem P_4 astfel încât B să fie mijlocul segmentului $[A_3P_4]$.

Notăm P_5 mijlocul segmentului $[A_3B]$ şi A_5 mijlocul segmentului $[P_5B]$.

Continuăm în acelaşi mod cu P_6, P_7, A_7, … .

a) Care este lungimea segmentului $[AA_5]$?

b) În şirul P_1, P_2, P_3, … alegeți două puncte consecutive astfel încât distanța dintre ele să fie mai mică decât $1mm$.

Profesor Mirela Novetschi

Bareme Clasa a VI-a

Subiectul 1

a) Observăm că elementele mulțimii M sunt din 5 în 5, deci de forma $5n+1$ unde $n \in \{0, 1, 2, \ldots 400\}$. **(1 punct)**

N este alcătuită din 203 astfel de numere, deci suma elementelor sale are expresia $5p+203$.

(1 punct)

$u(5p+203)$ este 3 sau 8. **(1 punct)**

$5p+203$ nu este pătrat perfect. **(1 punct)**

b) Mulțimea M este formată din submulțimile $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{6\}$, $M_3 = \{1006\}$ şi 199 submulțimi $M_4 = \{11, 2001\}$, $M_5 = \{16, 1996\}$, … $M_{202} = \{1001, 1011\}$. **(1 punct)**

Deoarece N este alcătuită din 203 numere din M, poate conține submulțimile M_1, M_2 sau M_3 şi cel puțin 100 dintre submulțimile cu două elemente M_4, M_5, … M_{202}.

(1 punct)

Suma numerelor din oricare submulțimi cu două elemente este 2012 ! Există în N două elemente a căror sumă este 2012. **(1 punct)**

Subiectul 2

a**)** În $s = 1+4+16+\cdots+4^{2015}$ observăm că începând cu al doilea termen, fiecare se obține din precedentul înmulțind cu 4, deci înmulțim ambii membrii egalității de mai sus cu 4: **(1 p)**

$$4s = 4+4^2+4^3+\cdots+4^{2015}+4^{2016}$$

Adunarea este comutativă, se poate scrie $s = 4+4^2+4^3+\cdots+4^{2015}+1$

Scăzând membru cu membru, obținem:

$$3s = 0\ +0\ +0\ +\cdots+0\quad +4^{2016}-1$$ **(1 punct)**

deci $3s+1=4^{2\cdot3\cdot336}=\left(4^{1008}\right)^2=\left(4^{672}\right)^3$. **(1 punct)**

$3s+1$ este pătrat perfect şi cub perfect. **(1 punct)**

b) Observăm că începând cu al doilea termen, fiecare se obține din precedentul adunând cu 3.

Notăm $3+6+9+\cdots+2013$ cu s şi scriem:

$$s = 3 \quad +6 \quad +9 \ \ldots +2013$$

$$s = 2013 + 2010 + 2007 \ \ldots \quad +3$$

Adunăm termen cu termen (sus-jos) şi obținem:

$$2s = 2016 + 2016 + 2016 \ \ldots + 2016$$ **(1 punct)**

Acum problema este câți termeni sunt!.

Termenii sunt din 3 în 3, deci $2013:3$, 671 termeni. **(1 punct)**

Aşadar $s=2016\cdot671:2=1008\cdot671$.

Cum $671=11\cdot61$ iar $1008=2^4\cdot3^2\cdot7$, s nu este pătrat perfect sau cub perfect. **(1 punct)**

Variantă $3+6+9+\cdots+2013=3(1+2+3+\cdots+671)$ **(1 punct)**

Observăm o sumă Gauss deci $=3\cdot(1+671)\cdot671:2$ **(4 puncte)**

$=1008\cdot671$ etc. **(1 punct)**

<u>Subiectul 3</u> Notăm cu a $m(<BOC)$. Atunci $m(<AOB)=3a$. Sunt posibile două variante:

$$B\in Int(<AOC)$$

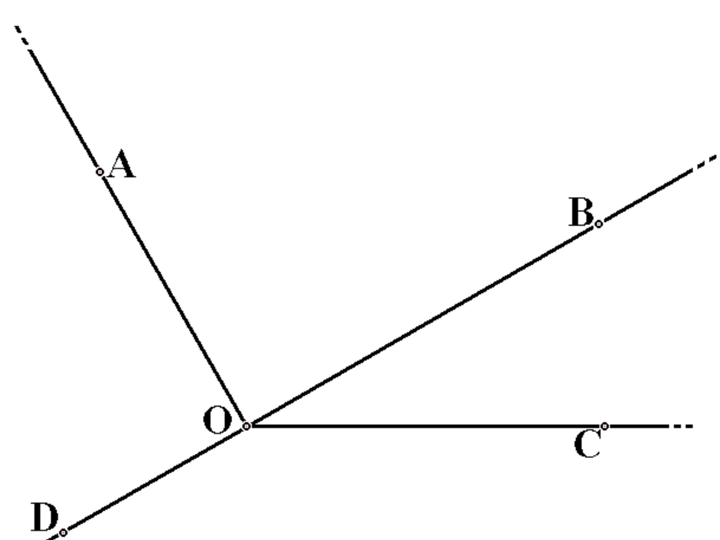
$$C\in Int(<AOB)$$ **(1 punct)**

Varianta $B\in Int(<AOC)$:

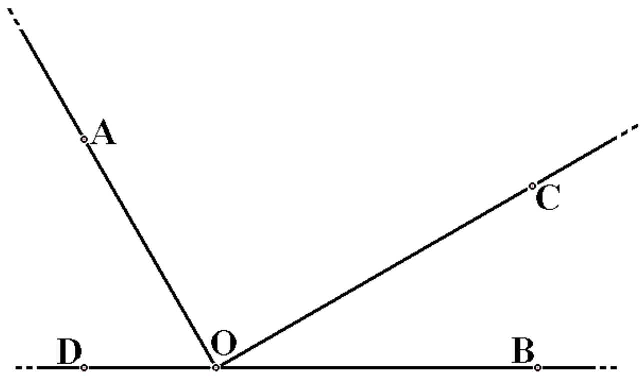
$$a+3a=120\leftrightarrow a=30^0$$

deci $m(<AOB)=90^0$ **(1 punct)**

şi $m(AOD)=90^0$. **(1 punct)**



(1 punct)



Varianta $C \in Int(< AOB)$:

$$3a - a = 120^0 \leftrightarrow a = 60^0$$

deci $m(< AOB) = 180^0$ **(1 punct)**

$A \in (OD$ aşadar $m(< AOD) = 0^0$

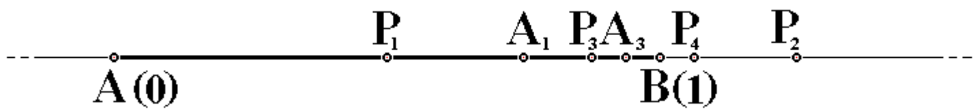
(1 punct)

Subiectul 4

Alegem pe dreapta AB reperul cu originea A, iar B ca punct ce determină sensul şi unitatea de măsură**.**

În raport cu acest reper $A(0)$ şi $B(1)$. **(1 punct)**

P_1 este mijlocul segmentului $[AB]$, abscisa sa este $\frac{1}{2}$. A_1 este mijlocul segmentului $[P_1B]$, are abscisa $\frac{3}{4}$. Observ că $[A_1B]$ are lungimea $\frac{1}{2^2}$. P_2 este astfel încât B să fie mijlocul segmentului $[A_1P_2]$, abscisa lui P_2 este $1+\frac{1}{2^2}$. P_3 este mijlocul segmentului $[A_1B]$. Jumătate din lungimea segmentului $[A_1B]$ este $\frac{1}{2^3}$, deci P_3 are abscisa $1-\frac{1}{2^3}$.



(1 punct)

Aceasta sugerează să exprim abscisa lui P_1 prin $1-\frac{1}{2^1}$ şi abscisa lui A_1 $1-\frac{1}{2^2}$. **(1 punct)**

A_3 este mijlocul segmentului $[P_3B]$. $[P_3B]$ are lungimea $\frac{1}{2^3}$, jumătatea sa are lungimea $\frac{1}{2^4}$, deci $A_3\left(1-\frac{1}{2^4}\right)$. **(1 punct)**

Punctele P_1, P_2, P_3, ... au abscisa respectiv $1-\frac{1}{2^1}$; $1+\frac{1}{2^2}$; $1-\frac{1}{2^3}$; $1+\frac{1}{2^4}$; ... iar puncte-le A_1, A_3, A_5, A_7, ... au abscisa respectiv $1-\frac{1}{2^2}$; $1-\frac{1}{2^4}$; $1-\frac{1}{2^6}$; $1-\frac{1}{2^8}$; ... . **(1 punct)**

Deci $[AA_5]$ are lungimea $1-\frac{1}{2^6}$, $\frac{63}{64}m$ adică $984{,}375mm$. **(1 punct)**

Observăm că dacă n este impar, punctele P_n sunt în stânga punctelor P_{n+1}, deci distanța dintre punctele consecutive P_n şi P_{n+1} este $1+\frac{1}{2^{n+1}}-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{3}{2^{n+1}}$.

$1mm=0{,}001m=\frac{1}{10^3}$. Atunci $\frac{3}{2^{n+1}}<\frac{1}{10^3}\leftrightarrow 2^{n+1}>\frac{1000}{3}\Big|:2\leftrightarrow 2^n>\frac{500}{3}$

Cum $2^7=128$ iar $2^9=512$, convine $n\geq 9$.

Punctele cerute pot fi P_9 şi P_{10}. **(1 punct)**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VRANCEA
CENTRUL METODIC FOCȘANI II

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală- 09.02.2013

Clasa a VI-a

1. a) Găsiți cel mai mare număr natural de trei cifre (în baza 10) știind că, dacă îl împărțim la 12 sau la 22, obținem de fiecare dată același rest.

   b) Aflați cea mai mare și cea mai mică fracție de forma care se simplifică prin 45.

2. Determinați toate numerele prime *a, b, c* știind că   este un număr prim,   și .

   (G.M. 2 / 2012)

3. Fie punctele coliniare *A, B, C, D*, în această ordine. Dacă *M, N, P* sunt mijloacele segmentelor *AB, BC, CD* și $MN = 9cm$, $NP = 7cm$, iar $AB + CD = 16$ cm, să se calculeze lungimile segmentelor *AB, BC, CD*.

4. În jurul unui punct *O* se consideră toate unghiurile ce se pot forma cu măsurile de în ordinea scrisă. Notăm cu unghiurile formate în ordinea precizată.
   a) Stabiliți câte unghiuri se pot forma, conform enunțului, în jurul punctului *O*.
   b) Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor   și .

Subiect propus de:

prof. Mihaela Diaconu - Școala Gimnazială „Ștefan cel Mare” Focșani
prof. Iuliana Baiciu - Școala Gimnazială Garoafa

Barem -clasa a VI-a

1. a) și ……………………………….1p

……………………………………………………………1p

…………………………………………………...1p

………………………………………………1p

b) numărătorul și numitorul trebuie să se dividă cu 5 și cu 9….1p

Pentru numărător se obțin valorile 3870 și 3375, iar pentru numitor 1260 și 1665……1p

Asta înseamnă că, cea mai mare fracție este , iar cea mai mică este ……..1p

2. Analizând paritatea termenilor sumei , luând în considerare și faptul că suma este un număr prim, obținem că, niciunul dintre a, b sau c nu poate fi 2……………….1p

Dacă am considera că a, b și c nu pot fi 3 rezultă că nici și cum un pătrat perfect , sau ……………………………………..1p

Atunci ………………………………………1p

unul dintre numere este 3 și cum și niciunul nu este 2 …………..1p

Avem . Pentru …………1p

sau ……2p

3. Notăm …………………………………..1p

Avem ……………………………………………………..3p

……………………………………………………………………………1p

………………………………………………………………………1p

…………………………………………………..1p

4. a) Suma măsurilor unghiurilor în jurul punctului *O* =

……………………………1p

……………………………………………………………1p

(grupe de câte 6 unghiuri) ………………………………………………1p

unghiuri în jurul punctului O

…………………………………………………1p

b) Dacă notăm și , atunci avem

…………...3p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NA□IONALE
Centrul Metodic Gugeşti

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală-9 februarie 2013-
CLASA a VI-a

1) . Afla□i numerele prime ab , pentru care a+b si b-a sunt numere prime .
(E:14412 din GM 2012) .

2) Determina□i cel mai mic număr natural □tiind ca împăr□indu-l la frac□iile $\frac{81}{41}, \frac{16}{61}, \frac{18}{97}$ catul este număr natural.

3) Dacă punctele A , B , C sunt coliniare astfel încât AB = 7 cm , AC = 13 cm , BC = 6 cm determina□i lungimea segmentului OB , □tiind ca O apar□ine dreptei AB si OM = 3 cm , M fiind mijlocul segmentului AC .

4) Fie A , O , B trei puncte coliniare cu O€ (AB) si [OX , [OY si [OZ trei semidrepte situate de aceiasi parte a dreptei AB . Daca (OX este bisectoarea unghiului < AOY si (OY este bisectoarea < XOZ si (OZ este bisectoarea unghiului < YOB , demonstra□i ca OY este perpendiculara pe AB .

Subiecte selectate □i propuse de :
Prof. **Nica Radi□a**
□coala Gimnazială,,□erban Ghica □i Aristi□a Ghica,,-Sihlea
Prof. **Stoica Marian**
□coala Gimnazială,,□erban Ghica □i Aristi□a Ghica,,-Sihlea
Prof. **Stoica Adina**
□coala Gimnazială-Pope□ti

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii
Pentru fiecare subiect se acordă 7 puncte
Nu se acordă puncte din oficiu
Timp de lucru 2 ore

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Centrul Metodic Gugeşti

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală-9 februarie 2013
CLASA a VI-a
Barem de corectare

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Subiectul I .
Numerele prime de forma ab € { 11, 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , 37 , 41, 43 , 53 , 59 , 61 , 67 , 71 , 73 , 79 , 83 , 89 }……………………………………………………………….3p
Determinarea sumei a+b si a diferentei b-a …………………………………………… 2p
Finalizare ab € { 29 } ……………………………………………….........................2p

Subiectul II .
Fie numarul a € N ;
$a : \frac{81}{41} \leftrightarrow a \cdot \frac{41}{81} \in N \leftrightarrow a \in M_{81}$ 1p
$a : \frac{16}{61} \leftrightarrow a \cdot \frac{61}{16} \in N \leftrightarrow a \in M_{16}$ 1p
$a : \frac{18}{97} \leftrightarrow a \cdot \frac{97}{18} \in N \leftrightarrow a \in M_{18}$ ………………………………………………… 1p
a = c . m . m . m c [81 ; 16 ; 18] …si determinare……………………….. 3p
finalizare a = 1296 ……………………………………………………………. 1 p
.
Subiectul III .
Reprezentarea corecta pe axa a punctelor A , B , C , M ……………………. 2 p
MB = 0 , 5 cm ; OM = 3 cm ; OB = OM + MB = 3 , 5 cm …………………………... 5 p

Subiectul IV .
Reprezentarea corecta a punctelor …………………………………………………......1 p
Determinarea m(<AOX)= m(< XOY) = m(< YOZ) = m(< ZOB) = 180^0 : 4 = 45^0……………………........3P
m(< YOB)=m(<YOZ) +m(< Z0B) = 45^0 + 45^0 = 90^0 rezulta OY este perpendicular pe AB ……......3p .

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Subiectul I

$$\left.\begin{array}{l}15a+33b+407c=2013\\ 3\mid 15b\\ 3\mid 33b\\ 3\mid 2013\end{array}\right\}\Rightarrow 3\mid 407c\Rightarrow 3\mid c;\ c\text{ - prim}\Rightarrow c=3.\ (\mathit{1p})$$

$15a+33b+407\cdot 3=2013$ .... (*1p*)
$5a+11b=264$ .... (*1p*)
$a=11$ .... (*1p*)
$5\cdot 11+11b=264$ .... (*1p*)
$11b=209$ .... (*1p*)
$b=19$ .... (*1p*)

Subiectul II

$$a+b=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{2013}{2014}+\frac{1}{2014}\right)\quad (\mathit{4p})$$

$$a+b=\underbrace{1+1+1+...+1}_{2013\text{ termeni}}=2013\quad (\mathit{2p})$$

$$2+0+1+3=6\ \vdots\ 3\Rightarrow 2013\ \vdots\ 3\Rightarrow (a+b)\ \vdots\ 3\quad (\mathit{1p})$$

Subiectul III

Realizarea desenului şi notarea corectă (*2p*)

$$m\left(\widehat{AOC}\right)+m\left(\widehat{BOD}\right)=\left[m\left(\widehat{AOD}\right)+2\cdot m\left(\widehat{DON}\right)\right]+$$
$$+\left[m\left(\widehat{AOD}\right)+2\cdot m\left(\widehat{MOA}\right)\right]\quad (\mathit{2p})$$
$$=2\cdot m\left(\widehat{AOD}\right)+2\cdot m\left(\widehat{DON}\right)+2\cdot m\left(\widehat{MOA}\right)\quad (\mathit{1p})$$
$$=2\cdot\left[m\left(\widehat{AOD}\right)+m\left(\widehat{DON}\right)+m\left(\widehat{MOA}\right)\right]\quad (\mathit{1p})$$
$$=2\cdot m\left(\widehat{MON}\right)=2\cdot 90^\circ=180^\circ.\quad (\mathit{1p})$$

Subiectul IV

Realizarea desenului şi notarea corectă (*1p*)
$[AF]\equiv[DE]$ (*3p*)
$[EM]\equiv[MF]$ (*3p*)

MINISTERUL EDUCATIEI, CERCETARII, TINERETULUI SI SPORTULUI

INSPECTORATUL SCOLAR AL JUDETULUI VRANCEA

CentrulMetodic -Panciu

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA ZONALĂ – 9 FEBRUARIE 2013

CLASA A V-A

Subiectul I (din culegere probleme)

Compara□i numerele:

$a = 2^{3n+2} - 2^{3+1} - 2^{3n}$, $b = 3^{2n+1} - 2 \cdot 3^{2n}$

Subiectul II (din culegere probleme)

Afla□i elementele mul□imilor A □i B care îndeplinesc simultan condi□iile:

a) A B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

b) A B = {3, 4}

c) A {5, 6, 7} =

d) {1, 2} B ≠

Subiectul III (din manual)

Simplifica□i frac□ia:

Subiectul IV (Gazeta matematica)

Andrei este cel mai mic dintre 5 fra□i □i Barbu cel mai mare. Emil este mai mic decât Călin. Dumitru este mai mare decât Emil □i decât Călin. Fiecare dintre fra□i diferă de următorul cu un acela□i număr întreg de ani (se consideră ani împlini□i, exprima□i prin numere întregi).

1. Să se scrie în ordinea crescătoare a vârstei cei cinci fra□i.
2. Dacă mijlociul are 7 ani care este suma vârstelor?
3. Care este maximul vârstei pe care ar putea-o avea cel mare?

Realizat de: Prof. Marieana Nedeloiu - □coala Gimnazială nr. 1 Străoane

Prof. Stanciu Ionel - □coala Gimnazială Soveja

MINISTERUL EDUCATIEI, CERCETARII, TINERETULUI SI SPORTULUI

INSPECTORATUL SCOLAR AL JUDETULUI VRANCEA

CentrulMetodic -Panciu

CLASA a V-a

Barem de notare

Subiectul I

$a = 2^{3n+2} – 2^{3n+1} – 2^{3n} = 2^{3n} \cdot 2^2 – 2^{3n} \cdot 2 – 2^{3n}$ ______ 1 p.

$= 2^{3n} \cdot (2^2 – 2 - 1)$ ______ 1 p.

$= 2^{3n} \cdot (4-2-1) = 2^{3n} \cdot 1 = 2^{3n}$ ______ 1 p.

$b = 3^{2n+1} - 2\cdot 3^{2n} = 3^{2n} \cdot (3 - 2)$ ______ 1 p.

$= 3^{2n} \cdot 1= 3^{2n}$ ______ 1 p.

$a = 2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$ ☐i $b = 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$ ______ 1 p.

Finalizare: $8^n < 9^n$; deci $a < b$ ______ 1 p.

Subiectul II

b) A B = {3, 4} rezultă {3, 4} apar☐ine ☐i lui A ☐i lui B______ 1 p.

c) A {5, 6, 7} = rezultă {5, 6, 7} nu apar☐ine lui A; apar☐ine lui B______ 1 p.

d) {1, 2} B ≠ rezultă {1, 2} apar☐ine lui B sau *1* apar☐ine lui A ☐i *2* apar☐ine lui B sau 1 lui B ☐i 2 lui A______ 2 p.

Finalizare: A = {3, 4} ☐i B = {1, 2, 3, 4, 5, 6,7}______ 1 p.

A = {1, 3, 4} ☐i B = {2, 3, 4, 5, 6,7}______ 1 p.

A = {2, 3, 4} ☐i B = {1, 3, 4, 5, 6,7}______ 1 p.

Subiectul III

ab0ab = a · 10000 + b · 1000 + a · 10 + b = 10010a + 1001b______2 p.

abcabc = a · 100000 + b · 10000 + c · 1000 + a · 100 + b · 10 +c = 100100a+ 10010b +1001c______2 p.

ab0ab = 1001 · (10a +b) = 1001 · ab______1 p.

abcabc = 1001 · (100a +10b+c) = 1001· abc______1 p.

Finalizare: După simplificare ob☐inem: 1p

Subiectul IV

1) Ordinea e următoarea: Andrei, Emil, Călin, Dumitru, Barbu. ______ 1 p.

2) Călin are 7 ani. Emil ☐i Dumitru diferă ca vârstă de Călin cu acela☐i număr întreg de ani – unul mai pu☐in ☐i altul mai mult. ______ 1 p.

Dacă adunăm vârstele lor, ob☐inem de două ori vârsta lui Călin, adică vârsta lui Emil + vârsta lui Dumitru = 14 ani.______1 p.

Ra☐ionament analog pentru Andrei ☐i Barbu: vârsta lui Andrei + vârsta lui Barbu = 14 ani.______1 p.

Suma vârstelor = 14 + 14 + 7 = 35 ani______ 1 p.

3) Cel mijlociu are 7 ani. Vârstele diferind cu un număr întreg de ani, această diferen☐ă poate fi de:

   Câte un an, rezultă că cel mai mic are 5 ani

   Câte 2 ani, rezultă că cel mai mic are 3 ani

   Câte 3 ani, rezultă că cel mai mic are 1 an

   Câte 4 ani, rezultă că nu se poate.

   Deci diferen☐a între fra☐i poate fi de cel mult câte 3 ani. În aceste condi☐ii, cel mare are 13 ani. ____ 2 p.

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI VRANCEA

CENTRUL METODIC VIDRA

OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
Clasa a VI-a

Subiectul I

Un număr de trei cifre are primele doua cifre identice, iar a treia cifră este 5.Acest număr se împarte la un număr de o cifră şi se obține restul 8. Să se găsească deîmpărțitul, împărțitorul şi câtul.

Subiectul II

Determinați a, b şi c, numere naturale prime pentru care este adevărată relația:

$$4a + 5b + 8c = 170.$$

Subiectul III

Dreptele AB şi CD se intersectează în punctul O, şi $A\hat{O}D = x < 90^0$. Fie $[OM$, $[OL$ şi $[OF$ bisectoarele unghiurilor $A\hat{O}D$, $M\hat{O}B$ respectiv $L\hat{O}C$.

a) Să se determine măsura unghiurilor $M\hat{O}D, M\hat{O}B, L\hat{O}C$ şi $L\hat{O}F$ în funcție de x.

b) Dacă $m(M\hat{O}F) = 139^0$, să se determine valoarea lui x şi măsura unghiului $M\hat{O}L$.

Subiectul IV

Să se determine numerele naturale a şi b, ştiind că $2^{3a} - 2^{3b} = \overline{xyz}$ şi $\overline{xyz}$ este număr impar.

Gazeta Matematica Nr.10/2011

Clasa a VI-a
BAREM DE EVALUARE

Subiectul I

Un număr de trei cifre are primele doua cifre identice, iar a treia cifră este 5.Acest număr se împarte la un număr de o cifră şi se obține restul 8. Să se găsească deîmpărțitul, împărțitorul şi câtul.

Solutie

$\overline{aa5} = b \cdot c + 8$, 8<b, b cifra
$\Rightarrow b = 9$ (impartitorul)..2p

$110a + 5 = 9c + 8$ 1p
110a=3(3c+1) 1p
$a \in \{3,6,9\}$
....1p
c = 73
(catul)..1p
$\overline{aa5} = 665$ (deimpartitul)
....1p

Subiectul II

Determinați *a*, *b* şi *c*, numere naturale prime pentru care este adevărată relația:
4*a* + 5*b* + 8*c* = 170.

Rezolvare

4a + 8c şi 170 sunt pare, atunci 5b este par, adică b este prim-par, adică b = 2. ....**2p**
4a + 8c = 170 – 10; a + 2c = 40, adică a este prim- par, adică a = 2. ....**2p**
2c = 40 – 2; c=19. ....**1p**

Subiectul III

Dreptele *AB* şi *CD* se intersectează în punctul *O*, şi $\hat{AOD} = x < 90^0$. Fie $[OM$, $[OL$ şi $[OF$ bisectoarele unghiurilor $\hat{AOD}$, $\hat{MOB}$ respectiv $\hat{LOC}$.

a) Să se determine măsura unghiurilor $\hat{MOD}, \hat{MOB}, \hat{LOC}$ şi $\hat{LOF}$ în funcție de *x*.

b) Dacă $m(\hat{MOF}) = 139^0$, să se determine valoarea lui *x* şi măsura unghiului $\hat{MOL}$.

Rezolvare

desen corespunzator **1p**

a) [OM bisectoare => $m\left(\widehat{MOD}\right)=\frac{x}{2}$

$m\left(\widehat{MOB}\right)=180^\circ-m\left(\widehat{MOA}\right)=180^\circ-\frac{x}{2}$ **1p**

$m\left(\widehat{LOC}\right)=\frac{m\left(\widehat{MOB}\right)}{2}+m\left(\widehat{BOC}\right)=90^\circ+\frac{3x}{4}$ **1p**

$m\left(\widehat{LOF}\right)=\frac{m\left(\widehat{LOC}\right)}{2}=45^\circ+\frac{3x}{8}$ **1p**

b)

$m\left(\widehat{MOF}\right)=139^\circ \Rightarrow \frac{m\left(\widehat{MOB}\right)}{2}+\frac{m\left(\widehat{LOC}\right)}{2}=139^\circ$ **1p**

$90^\circ-\frac{x}{4}+45^\circ+\frac{3x}{8}=139^\circ$

$x=32^\circ$ **1p**

$m\left(\widehat{MOL}\right)=\frac{m\left(\widehat{MOB}\right)}{2}=90^\circ-\frac{x}{4}$

$m\left(\widehat{MOL}\right)=82^\circ$ **1p**

Subiectul IV

Să se determine numerele naturale a şi b, ştiind că $2^{3a}-2^{3b}=\overline{xyz}$ şi $\overline{xyz}$ este număr impar.

Gazeta Matematica Nr.10/2011

Rezolvare

Daca $\overline{xyz}$ este numar impar, atunci $2^{3b}=1 \Rightarrow 2^{3b}=2^0 \Rightarrow 3b=0 \Rightarrow b=0$. **1p**

Rezulta ca $2^{3a}-1=\overline{xyz} \Rightarrow (2^3)^a-1=\overline{xyz} \Rightarrow 8^a-1=\overline{xyz}$ **2p**

Pentru $a=3$ obtinem $8^3-1=512-1=511$, ... **1p**

$a\le 2$ obtinem $8^2-1=64-1=63$, ceea ce nu este de trei cifre **1p**

$a\ge 4$ obtinem $8^4-1=4095$, ceea ce are mai mult de trei cifre **1p**

Rezulta ca singura solutie este $a=3$ si $b=0$. **1p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
COLEGIUL NAȚIONAL "AL. I. CUZA"

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală -februarie 2013

Clasa a VI-a

1. Arătați că pentru orice n , număr natural nenul, fracția $\frac{10n+9}{15n+1}$ este ireductibilă.(GM/2012)

2. Se consideră numerele $a=\frac{10,(10)}{1}+\frac{20,(20)}{2}+\frac{30,(30)}{3}+...+\frac{80,(80)}{8}$,

$b=\frac{1}{10,(10)}+\frac{2}{20,(20)}+\frac{3}{30,(30)}+...+\frac{8}{80,(80)}$ și

$c=\frac{10,(10)}{10,(10)\cdot 20,(20)}+\frac{10,(10)}{20,(20)\cdot 30,(30)}+\frac{10,(10)}{30,(30)\cdot 40,(40)}+...+\frac{10,(10)}{70,(70)\cdot 80,(80)}$

.

Demonstrați că:

a) $a\cdot b$ număr natural pătrat perfect.

b) $b:c \in \mathbb{Q}-\mathbb{N}$.

3. Se consideră unghiul alungit $\sphericalangle AOB$ și de aceeași parte a dreptei AB punctele C și D astfel încât $m(\sphericalangle COD)=90°$. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$.

4. Pe segmentul $[AB]$ se consideră punctele C,D,E,F, în această ordine astfel încât :

$AC=\frac{1}{7}AB, CD=\frac{9}{35}AB, DE=\frac{1}{10}AB$ şi $EF=\frac{1}{3}EB$. Să se afle cel mai mic număr natural nenul n, astfel încât segmentul $[AB]$ să poată fi împărțit în n segmente congruente, iar C,D,E,F să fie unele dintre punctele de diviziune.

Propunător : prof. Daniela Sîrghie – C.N. "Al.I.Cuza "-Focşani

Clasa a VI-a
Bareme

1. Fie d un număr natural prin care se simplifică fracţia $d \mid 10n+9$ şi

$d \mid 15n+1$ 2p

$d \mid 3(10n+9)-2(15n+1) \Rightarrow d \mid 25$ ....
2p

$\Rightarrow d \in \{1,5,25\}$ ....
1p

Dar 5 nu divide pe $10n+9$, deci nici 25, prin urmare $d =$ 1...2p

2.

$20,(20)=2\cdot 10,(10);30,(30)=3\cdot 10,(10);...;80,(80)=8\cdot 10,(10)$ ....
1p

a) $a = 8\cdot 10,(10)$ ....
.1p

$b=\dfrac{8}{10,(10)}$ 1p

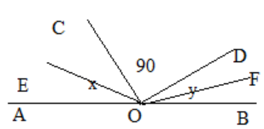
$ab = 8^2$ 1p

b) $c=\dfrac{1}{10,(10)}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{7\cdot 8}\right)=\dfrac{1}{10,(10)}\cdot\dfrac{7}{8}$ ....
..2p

$b:c=\dfrac{64}{7}\in \mathbb{Q}-\mathbb{N}$ ....
..1p

3.

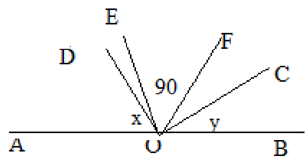
Cazul I



$x + y = 90$ 2p

$m(\sphericalangle EOF) = 180-45=135$ ....
1p

Cazul II



$x+y=90$ ……………………………..………..2p

$m(\angle EOF)=180-(\frac{x+90}{2}+\frac{y+90}{2})=45$.

…………………………………..…………2p

4. Figura..
....1p

Fie AB = x $\Rightarrow$ AC =
$\frac{1}{7}$x...1p

AD =
AC+CD=$\frac{2}{5}$x...1p

AE
=$\frac{1}{2}$x...1p

AF =
$\frac{2}{3}$x...1p

Numarul minim de segmente congruente in care putem imparti segmentul [AB] este c.m.m.m.c.
[7,5,2,3]...1p

Finalizare...
.....1p

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Vrancea

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală – 9.02.2013

Clasa a VI-a

<u>Subiectul I</u>

Să se determine cel mai mic număr natural format din 30 de cifre care are suma cifrelor 30 şi se divide la 30.

Gazeta Matematică

<u>Subiectul II</u>

a) Arătaţi că $\dfrac{3^{302}+4m+2}{5^{201}+m+1} > \dfrac{7^{401}+n}{3^{802}+2n}$, pentru orice numere naturale m şi n.

b) Stabiliţi dacă numărul natural x, soluţie a ecuaţiei $x - 16 = 15\cdot(16 + 16^2 + 16^3 + \ldots + 16^{n-1})$, cu

$n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$, este pătrat perfect

<u>Subiectul III</u>

Fie punctele $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$ coliniare în această ordine astfel încât $AB = 1$ cm ,

$BC = 2$ cm, $CD = 3$ cm,…, $JK = 10$ cm.

a) Determinaţi lungimea segmentului AK.

b) Determinaţi lungimea segmentului CH.

c) Dacă M este mijlocul segmentului BK, determinaţi lungimea segmentului MK.

Supliment Gazeta Matematică E 11.275/2012

<u>Subiectul IV</u>

Se consideră unghiul ascuţit XOY. In semiplanul determinat de (OX şi în care nu se află Y se duc semidreptele (OA şi (OB astfel încât m($\angle AOX$) =90^o şi m($\angle BOY$) =90^o. Se notează cu (OC bisectoarea unghiului BOX.

a) Dacă m($\angle XOC$) este cu 20^o mai mare decât m($\angle XOY$), să se afle m($\angle XOY$).

b) Dacă (OX este bisectoarea $\angle YOC$, atunci m($\angle YOC$)= m($\angle XOB$)

Nota: *Toate cele patru subiecte sunt obligatorii , fiecare dintre ele punctandu-se intre 0 si 7 puncte*

Timpul maxim de lucru 2 ore 30 minute.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Vrancea

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală – 9.02.2013

BAREM DE CORECTARE
Clasa a VI-a

Subiectul I

Fie A numarul cautat.
Din suma cifrelor lui $A = 30 \vdots 3$ deducem că numarul A este divizibil cu 3………………**1p**

si din $A \vdots 30$ si (3;10) = 1 obtinem ca ultima cifra a numarului A este 0…………**1p**

Pentru a obtine un numar cat mai mic, trebuie sa gasim o scriere a lui 30 ca suma de cat mai putine cifre nenule. Fie aceasta 9+9+9+3. …………**2p**

Pentru ca numarul format sa fie cel mai mic alegem prima cifra(ordinul cel mai mare) egala cu 1. ….**1p**

Obtinem numarul $1\underbrace{00\ldots00}_{24\ cifre}29990$ ……………... **2p**

Subiectul II

a) $\dfrac{3^{302}+4m+2}{5^{201}+m+1}=\dfrac{3^2\cdot 3^{300}+4m+2}{5\cdot 5^{200}+m+1}=\dfrac{9\cdot 27^{100}+4m+2}{5\cdot 25^{100}+m+1}>1$
…………………..**1p**
(Fiecare termen al numaratorului este mai mare decat termenii numitorului)
$\dfrac{7^{401}+n}{3^{802}+2n}=\dfrac{7^{401}+n}{9^{401}+2n}<1$ …………………………..**1p**

Din cele două relații rezultă imediat inegalitatea din enunț, pentru ca orice fractie subunitara este mai mica decat o fractie supraunitara …………………………**1p**
b) $x - 16 = (16-1)\cdot(16 + 16^2 + 16^3 + \ldots + 16^{n-1})$
$x - 16 = 16^2 + 16^3 + \ldots + 16^{n-1} + 16^n - 16 - 16^2 - 16^3 - \ldots - 16^{n-1}$ ………**1p**
$x - 16 = 16^n - 16$ …………………**1p**
$x = 16 + 16^n - 16$ …………….………**1p**
$x = 16^n = (4^n)^2$ …………………….…

<u>Subiectul III</u>

a) Determinarea lungimii segmentului $AK = AB + BC + \ldots + JK = 1+2+3+..+10 = 55$(cm) …………….**2p**
b) Determinarea lungimii segmentului $CH = CD + DE + .. + GH = 3+4+..+7 = 25$(cm)…….**2p**
c) Dacă M este mijlocul segmentului BK, atunci $BM = MK = BK :2 = (AK-AB) :2 = 54 :2 = 27$(cm) …….**3p**

<u>Subiectul IV</u>

Desen corespunzator datelor problemei **1p**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } m(\angle XOY) = a^o \text{ şi } m(\angle BOX) = 2b^o. \\ \text{(OC este bisectoare} \Rightarrow m(\angle BOC) = m(\angle XOC) = b^o \end{array}\right\} \Rightarrow b = a + 20^o \ (1) \ \ldots\ldots\ldots\ \mathbf{1p}$$

$$\left.\begin{array}{l} m(\angle BOY) = 90^o \\ m(\angle BOY) = 2b + a \end{array}\right\} \Rightarrow 2b + a = 90^o \ (2) \quad \ldots\ldots\ \mathbf{1p}$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow 2a+40^o + a = 90^o \Rightarrow 3a = 50^o \Rightarrow a = 16^o\, 40'$ ……..**1p**

b) (OX – bisectoarea $\angle COY \Rightarrow m(\angle XOY) = m(\angle COX) \Leftrightarrow a = b$ (3) ………**1p**

(OC – bisectoarea $\angle BOX \Rightarrow m(\angle BOX) = 2b$ …… … **0,5p**

$m(\angle BOX) + m(\angle YOX) = 90^o \Rightarrow 2b + a = 90^o$ (4) …… … **0,5p**
Din (3) şi (4) $\Rightarrow a = 30^0$

$$\left.\begin{array}{l} m(\angle BOX) = 2b \text{ ; } b = a = 30^o \Rightarrow m(\angle BOX) = 60^o \\ m(\angle COY) = 60^o \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BOX \equiv \angle COY \ \ldots\ldots\ \mathbf{1p}$$

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI VRANCEA

OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9 FEBRUARIE 2013
Clasa a VI-a

Subiectul 1.

Aratati ca numerele de forma: $2^{n+3} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} - 2^n \cdot 3^{n+4} \cdot 5^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n$ sunt divizibile cu 2010, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Prof Tarciniu Vasile, Odobesti,Vrancea,RMIC 2/2011

Subiectul 2.

Se dau numerele :

$a=1+2+2^2...+2^{1966}+2^{1967}$

$b=4(3^{1311}-3^{1310}+3^{1309}-3^{1308}+\ldots+3^3-3^2+3-1)$

a) Scrieți numerele a+1 şi b+1 ca o singură putere.

b) Comparați numerele a şi b.

prof. Tarciniu Vasile

Subiectul 3.

Se da fractia $F = \dfrac{372372...372379}{496496...496505}$ in care 372 si 496 se repeta de acelasi numar de ori. Aratati ca fractia F este ireductibila.

GM 1/2012

Subiectul 4.

Triunghiul ABC are AB = AC = 5 cm si BC = 8 cm. Bisectoarea unghiului ABC intersectează (AC) în punctul D. Perpendiculara din punctul C pe dreapta BD intersectează dreapta AB în E.

a) Demonstrati că triunghiul DCE este isoscel.

b) Calculati perimetrul triunghiului ADE.

prof. Tarciniu Vasile

<u>Clasa a VI-a</u>

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Subiectul 1.

$N = 2^n \cdot 2^3 \cdot 3^n \cdot 3 \cdot 5^n \cdot 5^2 - 2^n \cdot 3^n \cdot 3^4 \cdot 5^n \cdot 5 + 2^n \cdot 2 \cdot 3^n \cdot 3 \cdot 5^n$………..1p

$N = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot (8 \cdot 3 \cdot 25 - 81 \cdot 5 + 2 \cdot 3)$……………………………………….. 1p

$N = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot (600 - 405 + 6)$ ……………………………………………….. 1p

$N = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 201$ ………………………………………………………...1p

$N = 2^{n-1} \cdot 3^n \cdot 5^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 201$ ……………………………………………… ..1p

$N = 2^{n-1} \cdot 3^n \cdot 5^{n-1} \cdot 2010$ …………………………………………………...1p

$N \vdots 2010, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ……………………………………………………...1p

Subiectul 2.

a) $2a - a = 2^{1968} - 1$………………………………………………..………… 1p

$a + 1 = 2^{1968}$……..…………………………………………………..……………1p

$b = (3+1)(3^{1311} - 3^{1310} + 3^{1309} - 3^{1308} + \ldots + 3^3 - 3^2 + 3 - 1) = 3^{1312} - 1$……...……………1p

$b + 1 = 3^{1312}$…………...………………………………………………………. 1p

b) $a + 1 = 2^{1968} = (2^3)^{656} = 8^{656}$…………………………………………………1p

$b + 1 = 3^{1312} = (3^2)^{656} = 9^{656}$…………………………………………………1p

$a < b$ ………………………………………………………………..1p

Subiectul 3.

Se considera ca 372 si 496 se repeat de n ori.

$$F = \frac{372 \cdot 10^{n-3} + 372 \cdot 10^{n-6} + \ldots + 372 \cdot 10^3 + 379}{496 \cdot 10^{n-3} + 496 \cdot 10^{n-6} + \ldots + 496 \cdot 10^3 + 505}$$

$$F = \frac{372 \cdot (10^{n-3} + 10^{n-6} + \ldots + 10^3) + 379}{496 \cdot (10^{n-3} + 10^{n-6} + \ldots + 10^3) + 505}$$ ……………………………………………1p

Notam $a = (10^{n-3} + 10^{n-6} + \ldots + 10^3)$

$$F = \frac{372 \cdot a + 379}{496 \cdot a + 505}$$ ………………………………………………………………1p

Fie d este cel mai mare divizor comun pentru $372 \cdot a + 379$ si $496 \cdot a + 505$,atunci:

$d | 372 \cdot a + 7 \Rightarrow d | 4(372 \cdot a + 7)$ ……………………………………………………1p

$d | 496 \cdot a + 9 \Rightarrow d | 3(496 \cdot a + 9)$ …………………………………………………….1p

$d | 4(372 \cdot a + 7) - 3(496 \cdot a + 9)$ ………………………………………………… 1p

$d | 1488 \cdot a + 28 - 1488 \cdot a - 27 \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1$ ………………………………….. 1p

Concluzie: F este ireductibila ……………………………………………… 1p

Subiectul 4.

a) Fie $\{M\} = BD \cap CE$.

Δ BMC ≡ Δ BME (ULU sau CU), de unde rezultă [MC] ≡ [ME], [BC] ≡ [BE].....…… 2p

(Sau se folosec proprietățile triunghiului isoscel)
Δ DMC ≡ Δ DME (LUL sau CC), rezultă [DC] ≡ [DE] , deci Δ DCE isoscel 2p
(Sau foloseşte proprietatea mediatoarei)
b) Perimetrul Δ ADE este AD+DE+AE …………………………………………............ 1p
Din a) DE = DC, rezulta AD +DE =AC = 5cm, ……………………….............… …….1p
iar din BC =BE, avem AE =3cm, şi $P_{\Delta ADE} = 8\,cm$……………………......... …………..1p