Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - Maramureş

Clasa a X-a, **Varianta a II-a**

|  |  |
| --- | --- |
| *3 p* | **1. a)** Dacă , să se arate că . |
| *4 p* | **b)** Să se rezolve ecuația următoare, în mulțimea numerelor reale:  . |
|  | *Ludovic Longaver* |
|  |  |
| *7 p* | **2.** Să se rezolve ecuația  . |
|  |  |
| *7 p* | **3.** Arătați că dacă  este de modul 1, atunci numărul  este real.  Care numere reale sunt de această formă? |
|  | *S.L14.295, G.M. 11 / 2014* |
|  |  |
| *7 p* | **4.** Fie triunghiul  și punctele  astfel încât  e mijlocul lui ,  e mijlocul  lui ,  , ,  și .  Să se demonstreze că  dacă și numai dacă  este echilateral. |
|  | *Dana Heuberger* |

*Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

*Subiecte selectate şi prelucrate de:*

*Cristian Heuberger, C.N. „Gheorghe Șincai” Baia Mare*

*Ludovic Longaver, L.T . „Németh Làszló” Baia Mare*

*Costel Cioclu, L.T. „Emil Racoviță” Baia Mare*

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală – Maramureş, Clasa a X-a

**Varianta a doua, Soluții**

**1.** **a)** 

**b)** Din condițiile de existență rezultă domeniul: .

Ecuația se rescrie: , cu unica soluție .

**2.** Dincondițiile de existență:  obținem domeniul: .

Ecuația se rescrie:   .

Deoarece membrul stâng este o funcție strict crescătoare pe , iar funcția din membrul drept este strict descrescătoare pe , ecuația are cel mult o soluție.

Observăm că  verifică ecuația, deci este singura ei soluție.

**3.** Avem . Atunci,

.

Cum ultima relație este adevărată, rezultă că .

Fie . Căutăm , de modul 1, astfel încât .

Scriem , cu .

.

Obținem .

Pentru orice , există  astfel încât, pentru , avem .

**4.** **Soluția I.** Într-un reper oarecare, notăm cu literele mici corespunzătoare afixele punctelor din problemă.

Considerăm triunghiul  orientat în sens trigonometric.

Avem: , unde .

Notăm  și obținem: , deci

C

B

A

M

N

D

E

 și .

.

Înlocuind în egalitatea precedentă  și  cu valorile de mai sus, obținem: este echilateral.

**Soluția a II-a.** Notăm .

Din  rezultă  și  

Aplicând teorema sinusurilor în , obținem: .

Aplicând teorema sinusurilor în , obținem: .

Rezultă .

Folosind  și notând , obținem 

și apoi .

Folosind teorema medianei în , obținem:  .

Deoarece , rezultă .