OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a XII-a

Problema 1. Calculaţi $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 3. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $2n$ elemente şi H un subgrup al său cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $x^2 \in H$, pentru orice $x \in G$.

[∗∗∗]

Problema 3. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit şi H un subgrup propriu, necomutativ, al său. Arătaţi că există două elemente distincte din $G \setminus H$ care comută.

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Problema 4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi strict crescătoare şi $(c_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere reale.

Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x+c_n)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

Florian Dumitrel, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT
Etapa locală – 16 februarie 2014
CLASA A XII-A

Problema 1. Calculaţi $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}dx.$

Florian Dumitrel

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă

$$\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x = \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t,$$

obţinem

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\varphi(0)} \frac{x}{1+\sin 2x}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\frac{\pi}{2}-t}{1+\sin(\pi-2t)} \left(\frac{\pi}{2}-t\right)' dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-t}{1+\sin 2t}dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2t}dx - I. \end{aligned}$$

Prin urmare, $I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2t}dt.$

Notăm $J(a) = \int_0^a \frac{1}{1+\sin 2t}dx,\ a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; avem:

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_0^a \frac{1}{1+\sin 2t}dt = \int_0^a \frac{1+\mathrm{tg}^2\, t}{(1+\mathrm{tg}\, t)^2}dt = \int_0^a \frac{(1+\mathrm{tg}\, t)'}{(1+\mathrm{tg}\, t)^2}dt = \\ &= -\frac{1}{1+\mathrm{tg}\, t}\bigg|_0^a = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{tg}\, a}. \end{aligned}$$

Cum $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2t}dt = \lim\limits_{a \uparrow \frac{\pi}{2}} J(a) = 1$, deducem că $I = \frac{\pi}{4}$.

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $2n$ elemente şi H un subgrup al său cu n elemente. Să se arate că $x^2 \in H$ pentru orice $x \in G$.

[∗ ∗ ∗]

Soluţie. Presupunem că există $a \in G$ cu $a^2 \in G \setminus H$ (este clar că $a \in G \setminus H$). Funcţia

$$f : H \to G \setminus H,\ f(x) = ax$$

este injectivă şi, cum $|H| = |G \setminus H| = n$, rezultă că este şi surjectivă. Atunci există $x_0 \in H$ astfel încât $f(x_0) = a^2$, adică $ax_0 = a^2$, de unde $a = x_0 \in H$, contradicţie. Aşadar, $x^2 \in H$ pentru orice $x \in G$.

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit şi H un subgrup propriu, necomutativ, al său. Arătaţi că există două elemente distincte din $G \setminus H$ care comută.

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Soluţie. Deoarece H este subgrup propriu al lui G, avem $|H| \geq 2$ şi $G \setminus H \neq \varnothing$, deci există $a \in G \setminus H$.

Aplicaţia $\varphi : H \to G \setminus H$, $\varphi(x) = ax$ este injectivă şi atunci $|G \setminus H| \geq |H| \geq 2$, adică $G \setminus H$ are cel puţin două elemente distincte.

Presupunem prin absurd că oricare elemente distincte din $G \setminus H$ nu comută între ele. Pentru orice $b \in G \setminus H$ avem $b^{-1} \in G \setminus H$. Dacă am avea $b \neq b^{-1}$ ar rezulta că $bb^{-1} \neq b^{-1}b$, adică $e \neq e$, contradicţie. Deci $b = b^{-1}$, ceea ce înseamnă că $b^2 = e$ (e este elementul neutru al grupului G).

Fie $b \in G \setminus H$ şi $h \in H$. Atunci $bh \in G \setminus H$; obţinem $bh = (bh)^{-1} = h^{-1}b^{-1} = h^{-1}b$, de unde

$$bhb = h^{-1}. \qquad (*)$$

Fie acum $x, y \in H$ şi $b \in G \setminus H$. Folosind relaţia $(*)$, avem

$$bxy = bxb \cdot byb \cdot b = x^{-1}y^{-1}b = (byx)^{-1} = byx,$$

de unde obţinem $xy = yx$, în contradicţie cu faptul că H este grup necomutativ.

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi strict crescătoare şi $(c_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere reale.

Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x + c_n)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Florian Dumitrel

Soluţie. $(\Rightarrow)$ Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x + c_n)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ este primitivă a lui f. Deoarece F este continuă şi

$$\int_0^1 f(x + c_n)\, dx = \int_{c_n}^{c_n+1} f(t)\, dt = F(c_n + 1) - F(c_n),$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x + c_n)\, dx = F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x)\, dx$.

$(\Leftarrow)$ Vom demonstra acum că orice subşir convergent al şirului mărginit $(c_n)_{n\geq 1}$ are limita 0, de unde va rezulta că $c_n \to 0$. Fie $(c_{k_n})_{n\geq 1}$ un subşir convergent al şirului $(c_n)_{n\geq 1}$ şi $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_{k_n}$. Să presupunem că $c \neq 0$, de exemplu $c > 0$. Din faptul că f este strict crescătoare rezultă că $f(x + c) > f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$; obţinem

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x + c_{k_n})\, dx = \int_0^1 f(x + c)\, dx > \int_0^1 f(x)\, dx,$$

contradicţie. Deci $c = 0$.

Observaţie. Este suficient ca f să fie doar strict crescătoare, caz în care pentru a demonstra implicaţia $(\Leftarrow)$ se foloseşte criteriul lui *Lebesgue* de integrabilitate.