Olimpiada Naţională de Matematică
Faza Locală Dâmboviţa – 23 Februarie 2014

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Se dă şirul:

$$a_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

a) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, mărginit și aflați limita sa.

b) Să se afle limita șirului $b_n = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Gazeta Matematică 1965

Subiectul 2. Cum trebuie să fie numerele reale α, β, γ pentru ca raportul

$$\frac{\alpha\left(\sqrt{x}-1\right)+\beta\left(\sqrt[3]{x}-1\right)+\gamma\left(\sqrt[4]{x}-1\right)}{(x-1)^3}$$

să tindă către o limită finită și diferită de zero, când x tinde către 1 ?

Gazeta Matematică 1901

Subiectul 3. Fie matricele $B, C, X_1, X_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel ca $X_1X_2 = X_2X_1$, $\det(X_1 - X_2) \neq 0$, $X_1^2 - BX_1 + C = 0_2$ și $X_2^2 - BX_2 + C = 0_2$. Demonstrați că $X_1 + X_2 = B$ și $X_1X_2 = C$.

Gazeta Matematică 1977

Subiectul 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 2013 & 1 \\ 2014 & 1 \end{pmatrix}$.

Demonstraţi că matricea BA este inversabilă şi $BA - (BA)^{-1} = 2014 \cdot I_2$.

Gazeta Matematică 2013

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

BAREM

CLASA A XI-A

Subiectul 1. a_n descrescator (**2p**); a_n marginit (**1p**); $\lim a_n = 1$ (**1p**); $b_n = \frac{2(n+1)}{n+2}$ (**2p**); $\lim b_n = 2$ (**1p**).

Subiectul 2. $x = t^{12}$ (**1p**); $\lim_{t\to 1} \frac{\alpha\left(t^6-1\right)+\beta\left(t^4-1\right)+\gamma\left(t^3-1\right)}{(t-1)^3\left(t^{11}+\ldots+t+1\right)^3}$ (**1p**); $\frac{1}{12^3}\lim_{t\to 1} \frac{\alpha\left(t^6-1\right)+\beta\left(t^4-1\right)+\gamma\left(t^3-1\right)}{(t-1)^3}$ (**1p**); $\lim_{t\to 1} \frac{\alpha\frac{t^6-1}{t-1}+\beta\frac{t^4-1}{t-1}+\gamma\frac{t^3-1}{t-1}}{(t-1)^2}$ (**1p**); Trebuie ca $6\alpha + 4\beta + 3\gamma = 0$ (**1p**); $\lim_{t\to 1} \frac{\alpha\left[t^5+\ldots+1\right]+\beta\left[t^3+\ldots+1\right]+\gamma\left[t^2+t+1\right]}{(t-1)^2}$ $= \lim_{t\to 1} \frac{\alpha\left[\left(t^5-1\right)+\ldots+(t-1)\right]+\beta\left[\left(t^3-1\right)+\ldots+(t-1)\right]+\gamma\left[\left(t^2-1\right)+(t-1)\right]}{(t-1)^2}$ (**1p**); $\lim_{t\to 1} \frac{1}{t-1}\left\{\alpha\left[\frac{t^5-1}{t-1}+\ldots+1\right]+\beta\left[\frac{t^3-1}{t-1}+\ldots+1\right]+\gamma\left[\frac{t^2-1}{t-1}+1\right]\right\}$, deci trebuie si $(5+4+3+2+1)\alpha+(3+2+1)\beta+(2+1)\gamma = 15\alpha+6\beta+3\gamma = 0$ (**1p**).

Subiectul 3. $X_1^2 - X_2^2 = B(X_1 - X_2)$ (**1p**); $(X_1+X_2)(X_1-X_2) = B(X_1 - X_2)$ (**1p**); $X_1 + X_2 = B$ (**2p**); $C = BX_1 - X_1^2 = (X_1+X_2)X_1 - X_1^2 = X_1X_2$ (**3p**).

Subiectul 4. $\mathrm{tr}(AB) = 2014$ (**1p**); $\det(AB) = -1$ (**1p**); $\det(BA) = \det(AB) = -1 \neq 0$, deci A, B, BA inversabile (**1p**); Cayley: $(AB)^2 - 2014(AB) - I_2 = 0_2$ (**1p**); $A^{-1}\left[(AB)^2 - 2014(AB) - I_2\right]B^{-1} = 0_2$ (**1p**); $BA - 2014I_2 - A^{-1}B^{-1} = 0_2$ (**1p**) si $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$ (**1p**).