OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a X-a
27.02.2015

Subiectul I.(20 puncte)

Demonstraţi că în orice triunghi ascuţitunghic ABC are loc relaţia: $tg^2A+tg^2B+tg^2C\geq 9$

prof. Marilena Faiciuc, Colegiul Naţional Pedagogic "Gh. Lazăr"Cluj-Napoca

Subiectul II.(30 puncte)

Să se rezolve ecuaţia: $13^{x^2}\cdot 25^{x^2+2x+\frac{3}{2}}\cdot 31^{x^2+x+1}=2015$.

prof. Raul Domşa, Liceul Teoretic „Petru Maior" Gherla

Subiectul III.(20 puncte)

Fie $n\in N, n\geq 2$. Demonstraţi că $\log_{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\frac{n+1}{2}\geq\frac{1}{n}$.

Gazeta matematică

Subiectul IV.(20 puncte)

Fie ecuaţia binomă $z^4+1=0$. Notăm cu $M_k(z_k)$, $k\in\{1,2,3,4\}$ imaginile geometrice ale rădăcinilor ecuaţiei. Să se arate că oricum am lua punctele $P_q(z_q)$, $q\in\{1,2,3,4,5\}$, în interiorul patrulaterului $M_1M_2M_3M_4$ există două puncte P_i, P_j, $i, j\in\{1,2,3,4,5\}$, astfel încât $|z_i-z_j|<1$.

prof. Eugen Jecan, Colegiul Naţional Andrei Mureşanu Dej

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. ***SUCCES!***
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

Barem clasa a X-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

Aplicăm inegalitatea lui Jensen funcției f, $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow \mathbb{R}, f(x)=tg^2x$ **(5 p)**

$f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\le\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}$, de unde $tg^2A+tg^2B+tg^2C\ge 3tg^2\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\Rightarrow$

$tg^2A+tg^2B+tg^2C\ge 3tg^2\frac{\pi}{3}\Rightarrow tg^2A+tg^2B+tg^2C\ge 9$. **(10 p)**

Egalitatea are loc pentru $A=B=C=\frac{\pi}{3}$. **(5 p)**

Subiectul II. (30 puncte)

$13^{x^2}\cdot 25^{x^2+2x+\frac{3}{2}}\cdot 31^{x^2+x+1}=2015\,/:(13\cdot5\cdot31)\Rightarrow$ **(10 p)**

$13^{x^2-1}\cdot 25^{x^2+2x+1}\cdot 31^{x^2+x}=1\Leftrightarrow 13^{(x+1)(x-1)}\cdot 25^{(x+1)^2}\cdot 31^{x(x+1)}=1\Leftrightarrow\left[13^{x-1}\cdot 25^{x+1}\cdot 31^{x}\right]^{(x+1)}=1.$ **(10 p)**

Logaritmăm ambii membri:$(x+1)\cdot\lg\left(13^{x-1}\cdot 25^{x+1}\cdot 31^{x}\right)=0\Rightarrow x_1=-1\,si\,(x-1)\cdot\lg 13+(x+1)\cdot\lg 25+x\cdot\lg 31=0$

$\Rightarrow x_2=\frac{\lg 13-\lg 25}{\lg 13+\lg 25+\lg 31}$. **(10 p)**

Subiectul III. (20 puncte)

$\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$ **(10 p)**

$\Rightarrow \log_{n!}\frac{n+1}{2}>\log_{n!}\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{n}$ **(10 p)**

Subiectul IV. (20 puncte)

Aflarea rădăcinilor ecuaţiei binome $z_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}$, $k\in\{0,1,2,3\}$ şi reprezentarea lor **(15 p)**

Imaginile geometrice ale rădăcinilor ecuaţiei sunt vârfurile unui pătrat înscris în cercul unitate, ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate. **(2 p)**

Axele de coordonate împart pătratul $M_1M_2M_3M_4$ în patru pătrate de latură $\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi diagonale egale cu 1, deci distanţa maximă dintre două puncte $P_i(z_i), P_j(z_j)$ aflate în interiorul unui astfel de pătrat este $|z_i-z_j|<1$ **(2 p)**

Cum avem 5 puncte, există două care se află într-un astfel de pătrat (principiul cutiei) **(1 p)**