OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

BAREM

CLASA A XI-A

Programa M1

1.	**Din oficiu**	**1p**
	În cazurile a=0 şi a<0 limita este infinită	**2p**
	Se impune a>0	**1p**
	Amplificând cu conjugata avem $\lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{\left(a^2-1\right)n^2-bn-c}{an+\sqrt{n^2+bn+c}}$ şi rezultă $a=1,\ b=0,\ c$ arbitrar	**6p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Observăm că $x_1, x_5, ..., x_{4k+1}, ..., x_{2013}, ...$ determină o progresie aritmetică de raţie 4. Deci $x_{2013}=x_1+\dfrac{2013-1}{4}\cdot r=2+\dfrac{2013-1}{4}\cdot 4=2+2012=2014$	**4p**
b.)	Şirul dat este format din 4 subşiruri fiecare de raţia 4. Fie $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un astfel de subşir şi vom avea: $a_n=2013$ $a_1+\left(n-1\right)r=2013$, $r=4$, $a_1\in\{2,4,1,3\}$ $n=\dfrac{2013-a_1}{4}+1$ $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left(2013-a_1\right)\vdots 4\Rightarrow a_1=1=x_3$ $\Rightarrow n=504$ adică 2013 este termen al subşirului $x_3, x_7, ..., x_{4k+3}, ...$deci termen al șirul dat și $x_{2015}=2013$	**5p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$\det\left(X^2\right)=\det\left(A\right)$; $A=\begin{pmatrix}2013 & 1\\ 2012 & 1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow\left(\det X\right)^2=\begin{vmatrix}2013 & 1\\ 2012 & 1\end{vmatrix}=1\Rightarrow\det X=\pm1$	**1p**
	Aplicăm relaţia lui Cayley – Hamilton: $X^2-tr\left(X\right)\cdot X+\det X\cdot I_2=O_2\Rightarrow \underbrace{tr\left(X\right)}_{=t}\cdot X=X^2+\det X\cdot I_2$	**1p**
	Avem două cazuri: Caz i. $\det X=1$ $t\cdot X=X^2+I_2\Rightarrow t\cdot X=\begin{pmatrix}2013 & 1\\ 2012 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow t\cdot X=\begin{pmatrix}2014 & 1\\ 2012 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$ $\Rightarrow tr\left(t\cdot X\right)=tr\begin{pmatrix}2014 & 1\\ 2012 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow t^2=2016\Rightarrow t=\pm\sqrt{2016}\Rightarrow X=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2016}}\begin{pmatrix}2014 & 1\\ 2012 & 2\end{pmatrix}$ $\left(2p\right)$	**2p**

	Caz ii. $\det X=-1$ $t\cdot X=X^2-I_2\Rightarrow t\cdot X=\begin{pmatrix}2013 & 1\\ 2012 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow t\cdot X=\begin{pmatrix}2012 & 1\\ 2012 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$ $\Rightarrow tr(t\cdot X)=tr\begin{pmatrix}2012 & 1\\ 2012 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow t^2=2012\Rightarrow t=\pm\sqrt{2012}\Rightarrow X=\pm\frac{1}{\sqrt{2012}}\begin{pmatrix}2012 & 1\\ 2012 & 0\end{pmatrix}$ $(2p)$	**2p**
b.)	Observăm că soluţiile sunt opuse două câte două. Fie $X_1=-X_2$ şi $X_3=-X_4$ $(1p)$ $X_1^{2013}+X_2^{2013}+X_3^{2013}+X_4^{2013}=(-X_2)^{2013}+X_2^{2013}+(-X_4)^{2013}+X_4^{2013}=$ $-X_2^{2013}+X_2^{2013}-X_4^{2013}+X_4^{2013}=O_2$	**3p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Evident dacă $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, atunci şi A^* are elementele numere întregi. Pe de altă parte $A\in M\Rightarrow(\det A)^3=\det A$ şi $\det A\neq 0\Rightarrow(\det A)^2=1\Rightarrow(\det A)=\pm1$ Astfel $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\pm A^*\in\mathcal{M}_3(Z)$	**2p**
	Înmulţind la dreapta şi la stânga egalitatea $A^3=A$ cu A^{-1}obţinem $A^2=I_3$. Astfel $A^{-1}=A$, însă $A^{-1}=\pm A^*$ deci rezultă că $A^*=\pm A\in M$.	**2p**
b.)	Evident O_3, I_3,$-I_3\in M$	**1p**
	Aplicând teorema Cayley-Hamilton şi folosind relaţia $A^3-A=O_3$ obţinem matricea $A_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in M$	**1p**
c.)	Observăm că $(A-I_3)\cdot(A^2+A+2\cdot I_3)=2\cdot(A-I_3)$, deoarece $A\in M$. Rezultă că $\det(A-I_3)\cdot\det(A^2+A+2\cdot I_3)=\det[2\cdot(A-I_3)]=2^3\cdot\det(A-I_3)$	**2p**
	$\det(A-I_3)\neq 0$ implică $\det(A^2+A+2\cdot I_3)=2^3=8$	**1p**

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

CLASA A XI-A

Programa M1

1.) Ştiind că limita $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(an-\sqrt{n^2+bn+c}\right)$ este finită, să se determine $a, b, c \in R$.

2.) Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: 2,4,1,3,6,8,5,7,10,12,9,11,…

a) Aflaţi al 2013-lea termen al şirului.

b) Decideţi dacă 2013 este termen al şirului.

3.) Fie ecuaţia $X^2=\begin{pmatrix} 2013 & 1 \\ 2012 & 1 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbb{C})$

a) Să se rezolve ecuaţia.

b) Dacă $X_{1,2,3,4}$ sunt soluţiile ecuaţiei să se calculeze $X_1^{2013}+X_2^{2013}+X_3^{2013}+X_4^{2013}$.

4.) Fie mulţimea de matrici M = $\{A\in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \,/\, A^3-A=O_3\}$.

a) Să se demonstreze că dacă A∈M şi detA≠0, atunci $A^* \in$ M, unde A^* este adjuncta matricei A.

b) Să se demonstreze că mulţimea M are cel puţin patru elemente.

c) Să se demonstreze că dacă A∈M şi $\det(A-I_3)\neq 0$, atunci $\det(A^2+A+2\cdot I_3)=8$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

BAREM

CLASA A XI-A

Programa M2

1.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$A^2 = 3A \Rightarrow a = 3$	**1p**
b.)	dacă $B = A - A^t \Rightarrow B^4 = I_2 \Rightarrow B^{4k} = I_2, k \in N^*$	**2p**
	$\Rightarrow B^{2013} = B$	**1p**
c.)	Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $X^5 = A \Rightarrow \det\left(X^5\right) = \det A$, dar $\det A = 0$ și $\det\left(X^5\right) = \left(\det x\right)^5$ de unde obținem $\det X = 0$	**1p**
	Din relația lui Cayley-Hamilton avem: $X^2 - tr\left(X\right)\cdot X + \det X \cdot I_2 = O_2$ rezultă $X^2 = (a+d)X$	**1p**
	De unde prin înmulțiri succesive obținem $X^5 = \left(a+d\right)^4 X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(a+d\right)^4 X$	**1p**
	Din $tr\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = tr\left(\left(a+d\right)^4 X\right)$ obținem $3 = \left(a+d\right)^5 \Leftrightarrow a+d = \sqrt[5]{3}$	**1p**
	Deci $X = \dfrac{1}{\left(a+d\right)^4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[5]{3}\right)^4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de unde $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt[5]{81}} & \frac{2}{\sqrt[5]{81}} \\ \frac{1}{\sqrt[5]{81}} & \frac{1}{\sqrt[5]{81}} \end{pmatrix}$	**1p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
	determinare domeniului	**1p**
	nu are asimptotă orizontală	**1p**
	nu are asimptotă verticală	**1p**
	$y = x$ asimptotă oblică spre $+\infty$	**3p**
	$y = -x$ asimptotă oblică spre $-\infty$	**3p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
	$\Delta = \begin{vmatrix} n! & (n+1)! & (n+2)! \\ (n+1)! & (n+2)! & (n+3)! \\ (n+2)! & (n+3)! & (n+4)! \end{vmatrix} = (n!)\cdot(n+1)!\cdot(n+2)!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n+1 & n+2 & n+3 \\ n^2+3n+2 & n^2+5n+6 & n^2+7n+12 \end{vmatrix}$	**2p**
	$\Delta = (n!)^3\cdot(n+1)^2\cdot(n+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 1 \\ n^2+3n+2 & 2n+4 & 2n+6 \end{vmatrix}$	**2p**
	$\Delta = (n!)^3\cdot(n+1)^2\cdot(n+2)\cdot 2$	**2p**
	Deci ecuaţia se transformă astfel: $2(n!)^3\cdot(n+1)^2\cdot(n+2) = (n!)^3\cdot\left(n^2+3n+2\right)\cdot(n+12) = (n!)^3\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+12)$	**1p**
	Fiecare factor fiind strict pozitiv putem simplifica cu $(n!)^3\cdot(n+1)\cdot(n+2)$, obţinând ecuaţia $2(n+1) = n+12$ a cărei soluţie este $n = 10$.	**2p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
	Coordonatele punctelor sunt: $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$, $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $f(x)=0$, iar $\Delta= b^2 - 4ac$	**3p**
	Aria triunghiului este S= $\lvert d\rvert/2$	**1p**
	cu d= $\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ \frac{-b}{2a} & \frac{-\Delta}{4a} & 1 \end{vmatrix} = \ = \frac{\Delta}{4a}\left(x_1 - x_2\right) \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left\lvert\frac{\Delta}{4a}\right\rvert \cdot \lvert x_1 - x_2\rvert = \frac{1}{8}\frac{\Delta}{\lvert a\rvert} \cdot \lvert x_1 - x_2\rvert$.	**3p**
	Utilizând relaţiile lui Viète, se obţine $\lvert x_1 - x_2\rvert = \frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$ de unde S= $\frac{\sqrt{\left(b^2 - 4ac\right)^3}}{8a^2}$.	**2p**

CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

CLASA A XI-A

Programa M2

1.) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ o matrice.

a) Să se demonstreze că există $a \in R$ astfel încât $A^2 = aA$!

b) Să se calculeze matricea $\left(A - A^t\right)^{2013}$!

c) Să se rezolve ecuaţia $X^5 = A,\ X \in M_2(R)$!

2.) Se consideră funcţia $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Să se determine domeniul maxim de definiţie şi asimptotele funcţiei *f*.

3.) Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale următoarea ecuaţie:

$$\begin{vmatrix} n! & (n+1)! & (n+2)! \\ (n+1)! & (n+2)! & (n+3)! \\ (n+2)! & (n+3)! & (n+4)! \end{vmatrix} = (n!)^3 \cdot \left(n^2 + 3n + 2\right) \cdot (n + 12)$$

4.) Fie funcţia $f : R \to R,\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a,b,c \in R,\ a \neq 0,\ b^2 - 4ac > 0$.

Să se calculeze, în funcţie de *a*, *b*, *c* aria triunghiului *AVB*, unde *A* şi *B* sunt punctele de intersecţie ale graficului funcţiei *f* cu axa *Ox*, iar *V* este vârful parabolei reprezentând funcţia *f*.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore