BAREM –CLASA AV-A
Rezolvare :

1)Se noteaza cu a,b,c,d,e,f,g,h cele 8 numere naturale nenule si S- suma lor.
Din ipoteza avem : S-a = 42 ; S-b = 47 ; S-c = 50 ; S-d = 52 ; S-e = 54 ; S-f =55 ; S-g = 56 ; S-h = 57 ………….2p.
Adunand relatiile de mai sus se obtine : 8S- (a+b+c+d+e+f+g+h) =413………..1p.
Deci :8S-S =413 $\Rightarrow$ 7S =413 $\Rightarrow$ S= 59………….2p.
Inlocuind S in relatiile de mai sus , se obtin : a=17 , b=12 , c= 9 , d= 7 , e= 5 , f= 4 , g= 3 si h=2 ………….2p.

Rezolvare :

2)Notam cu n numarul natural cautat .
Din ipoteza , folosind teorema de impartire cu rest , avem : n = 11c+r cu $0 \le r < 11$….. 1p.
Stiind ca r este patrat perfect nenul $\Rightarrow$ $r \in \{1,4,9\}$ ………….1p.
Din ipoteza , catul c este patrat perfect nenul , mai mic decat restul r .
1) Daca r = 1 $\Rightarrow$ c = 0 (contradictie cu ipoteza)…………..1p.
2) Daca r = 4 $\Rightarrow$ c = 1 …………1p. $\Rightarrow$ n = 15 ……………………..1p.
3) Daca r = 9 $\Rightarrow$ $c \in \{1,4\}$ ………..1p. $\Rightarrow$ n = 20 sau n = 53 ……………1p.

In concluzie : $n \in \{15,20,53\}$

Rezolvare :

3)Scriind in baza 10 numerele din egalitatea de mai sus , se obtine :
100a + 10b +c = 19(10b + c) . $\Leftrightarrow$ 100a + 10b + c = 190 b + 19c …………..1p. $\Leftrightarrow$
100a = 180b + 18c . $\Leftrightarrow$ 100a = 18(10b + c) ………….. .1p.
Cum 9 divide 18 $\Rightarrow$ 9 divide 18(10b + c) $\Rightarrow$ 9 divide 100a 1p.
Deoarece numerele 9 si 100 nu au divizori comuni diferiti de 1 (sunt prime intre ele)
$\Rightarrow$ 9 divide a ………..1p. Din ipoteza $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \Rightarrow a = 9$ …………………..1p.
Inlocuind , se obtine : 900 = 18(10b + c) $\Rightarrow$ 10b + c = 50.
$\Rightarrow$ c = 10(5-b) .Cum $c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \Rightarrow c = 0$ ……1p. $\Rightarrow$ b = 5 ……………...1p.
In concluzie : a = 9 ; b = 5 ; c = 0 .

Rezolvare :

4)Avem : $819 = 7 \cdot 9 \cdot 13$ …………..1p.
Pe de alta parte : $63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2} = (7 \cdot 9)^n + 7^n \cdot 7 \cdot 3^{2n} \cdot 3 - \left(3 \cdot 7\right)^n \cdot 3^n \cdot 9$ ………..2p.
$= 7^n \cdot \left(3^2\right)^n + 21 \cdot 7^n \cdot 3^{2n} - 3^n \cdot 7^n \cdot 3^n \cdot 9$ ……….1p.
$= 7^n \cdot 3^{2n} + 21 \cdot 7^n \cdot 3^{2n} - 9 \cdot 7^n \cdot 3^{2n}$ …………….1p.
$= 3^{2n} \cdot 7^n \left(1 + 21 - 9\right) = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 13$ …………….1p

Pentru orice numar natural nenul n , avem :

$3^{2n}=\left(3^2\right)^n=9^n \vdots 9$

$7^n \vdots 7$

$\Rightarrow 3^{2n}\cdot 7^n\cdot 13 \vdots 9\cdot 7\cdot 13 \Rightarrow A \vdots 819$ …………1p.

SUBIECTE-OLIMPIADA LOCALA

FEBRUARIE-2013

MATEMATICA –CLASA A V-A

1) Se considera opt numere naturale distincte. Efectuand toate sumele oricaror 7 numere , dintre cele opt , se obtin rezultatele : 42 , 47 , 50 ,52 ,54 , 55 , 56 , 57 .
Determinati cele opt numere . (7p.)

2)Aflati numerele naturale care impartite la 11 dau catul si restul patrate perfecte nenule , iar catul este mai mic (strict) decat restul . (7p.)

3) Determinati cifrele a , b ,c stiind ca $\overline{abc} = 19 \cdot \overline{bc}$ (7p.)

4) Aratati ca numarul $A = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ se divide cu 819 , pentru orice n numar natural nenul. (7p.)