OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1.

Fie A o matrice de ordin doi cu elemente reale şi A^t matricea transpusă. Ştiind că $\det(A + A^t) = 8$ şi $\det(A + 2A^t) = 27$, să se calculeze $\det(A)$.

GMB

SUBIECTUL 2.

Fie $A \in M_3(C)$ inversabila, cu $\det(A) = 1$. Demonstrati echivalenta:

$$\det(A + I_3) = \det(A - I_3) \Leftrightarrow tr(A^{-1}) = -1$$

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 3.

Fie șirurile $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 \in (0,1)$ dat, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \forall n \geq 1$ și $y_n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

a) Calculați $\lim_{n\to\infty} y_n$.
b) Calculați $\lim_{n\to\infty} n \cdot (x_1 - y_n)$

Niculae Cavachi

SUBIECTUL 4.

Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\in N^*}$ definit astfel: $x_1 > \sqrt{3}$ şi $x_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{1 + nx_n^2}}, \forall n \in N^*$.

a) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$
b) Să se arate că şirul $(nx_n)_{n\in N^*}$ este convergent şi să se determine $\lim_{n\to\infty} nx_n$.

Cătălin Zîrnă

Notă:
Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1.

Notăm $f(x)=\det\left(A+xA^t\right)\Rightarrow f(x)=x^2\det(A^t)+mx+\det(A)=x^2\det(A)+mx+\det(A)$ **3p**

$\det(A+A^t)=8\Rightarrow f(1)=8$ și $\det(A+2A^t)=27\Rightarrow f(2)=27$ **2p**

$2\det(A)+m=8,\ 5\det(A)+2m=27\Rightarrow \det(A)=11$ **2p**

Subiectul 2.

A inversabila $\Rightarrow A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_3\Rightarrow \det A\cdot\det\left(A^{-1}\right)=1$

$\det A=1\Rightarrow \det\left(A^{-1}\right)=1$

$\det(A+I_3)=\det(A-I_3)\Leftrightarrow \det\left(A+A\cdot A^{-1}\right)=\det\left(A-A\cdot A^{-1}\right)\Leftrightarrow \det A\cdot\det\left(I_3+A^{-1}\right)=$

$=\det A\cdot\det\left(I_3-A^{-1}\right)\Leftrightarrow \det\left(I_3+A^{-1}\right)=\det\left(I_3-A^{-1}\right)\Leftrightarrow \det\left(I_3+A^{-1}\right)+\det\left(-I_3+A^{-1}\right)=0$

.... **2p**

Consideram $P(X)=\det\left(X\cdot I_3+A^{-1}\right)=X^3+c_2X^2+c_1X+c_0$, unde

$c_2=tr\left(A^{-1}\right)$, $c_0=P(0)=\det\left(A^{-1}\right)=1$ **3p**

$P(1)+P(-1)=\det\left(I_3+A^{-1}\right)+\det\left(-I_3+A^{-1}\right)=0\Leftrightarrow 2(c_2+c_0)=0\Leftrightarrow c_2=-c_0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tr\left(A^{-1}\right)=-1$

.... **2p**

Subiectul 3.

a) $x_k\in(0,1),\forall k\geq 1$ (prin inducție)

$\frac{x_{k+1}}{x_k}=1-x_k<1 \Rightarrow (x_n)\downarrow \Rightarrow (x_n)_n$ convergent. **1p**

Fie $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\ l\in[0,x_1)\Rightarrow l=l-l^2\Rightarrow l=0$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ **1p**

$x_n^2=x_n-x_{n+1},\forall n\geq 1$

$x_1^2=x_1-x_2$

$x_2^2=x_2-x_3\quad \overset{+}{\Rightarrow}\quad y_n=x_1-x_{n+1},\forall n\geq 1\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_1$ **2p**

$\vdots$

$x_n^2=x_n-x_{n+1}$.

b) $n\cdot(x_1-y_n)=\frac{n}{\frac{1}{x_1-y_n}}=\frac{a_n}{b_n}$, unde $a_n=n,\ b_n=\frac{1}{x_1-y_n},\ b_n\uparrow\infty$. **1p**

Atunci conform criteriului Stolz – Cesaro avem:

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot(x_1-y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_1-y_{n+1}}-\frac{1}{x_1-y_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_1-y_n)\cdot(x_1-y_{n+1})}{y_{n+1}-y_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}\cdot x_{n+2}}{x_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(1-x_{n+1})$$ **2p**

Subiectul 4.

a) Prin inducție matematică se arată că $x_n > 0,\ \forall n \geq 1$ și de aici $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+nx_n^2}} < 1 \Rightarrow$ șir strict descrescător, așadar convergent. **2p**

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \geq 0$.

Presupunem, prin reducere la absurd, că $L > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{1+nx_n^2}} = 0 \Rightarrow L = 0$, contradicție. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. **1p**

b) $(n+1)x_{n+1} - nx_n = \cdots = \dfrac{nx_n\left(\sqrt{\dfrac{2n+1}{n}} - nx_n\right)\left(\sqrt{\dfrac{2n+1}{n}} + nx_n\right)}{\sqrt{1+nx_n^2}\cdot\left(n+1+n\sqrt{1+nx_n^2}\right)}$ **(1)**

Arătăm, prin inducție matematică, că $nx_n > \sqrt{\dfrac{2n+1}{n}},\ \forall n \geq 1$. **(2)**

$n = 1:\ x_1 > \sqrt{3}$, adevărat.

Presupunem $nx_n > \sqrt{\dfrac{2n+1}{n}}$ și demonstrăm că $(n+1)x_{n+1} > \sqrt{\dfrac{2n+3}{n+1}}$.

$$(n+1)x_{n+1} - \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}} = \cdots = \frac{n^3+n^2+1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n+1)x_{n+1}+\sqrt{\dfrac{2n+3}{n+1}}}\cdot\left(nx_n + \sqrt{\frac{2n^3+3n^2}{n^3+n^2+1}}\right)\left(nx_n - \sqrt{\frac{2n^3+3n^2}{n^3+n^2+1}}\right)$$

Cum $nx_n > \sqrt{\dfrac{2n+1}{n}} > \sqrt{\dfrac{2n^3+3n^2}{n^3+n^2+1}}$ (calcul!) $\Rightarrow (n+1)x_{n+1} > \sqrt{\dfrac{2n+3}{n+1}} \Rightarrow$ **(2)**. Din (1) și (2) rezultă că $\left(nx_n\right)_{n\geq 1}$ este strict descrescător iar din pozitivitate avem că este convergent.................................... **2p**

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = a \geq 0$.

Din (a), șirul $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$ și este strict crescător. Cum $nx_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_n}}$, cu criteriul Stolz-Cesaro avem

$$\frac{n+1-n}{\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}} = \frac{x_n}{\sqrt{1+nx_n^2}-1} = \frac{\sqrt{1+nx_n^2}+1}{nx_n} \to \begin{cases} +\infty, & a = 0 \\ \dfrac{2}{a}, & a > 0 \end{cases}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = a \Rightarrow a = \dfrac{2}{a},\ a > 0 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ **2p**

<u>**Notă**</u> **: Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .**