Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a V-a

Problema 1.

a). Să se scrie numărul natural 5^4 ca suma a trei numere naturale pătrate perfecte.

b). Să se demonstreze că numărul natural 5^{2n+4} se scrie ca suma a trei numere naturale pătrate perfecte, oricare ar fi numărul natural *n*.

Problema 2.

Fie numerele naturale $x = 3^{2014} \cdot 5^{2015} + 2$ şi $y = 3^{2015} \cdot 5^{2014} + 2.$

a) Să se compare numerele x^{2015} şi y^{2014}. $(\textit{justificaţi})$

b) Să se demonstreze că $(x + y) \vdots 4.$

Problema 3.

Astăzi am fost la piaţa de păsări cu porumbei, gâşte şi curci, în total 80 de păsări, numărul curcilor fiind de cinci ori numărul gâştelor. Pentru 5 curci am primit la schimb 6 gâşte, iar pentru 7 gâşte am primit la schimb 11 porumbei. După schimb, am plecat acasă cu 100 de păsări, numai porumbei. Cu câţi porumbei, cu câte gâşte şi cu câte curci am plecat de acasă?

Problema 4.

a). Să se determine mulţimea $A = \{n \in \mathbb{N}^* / n^2 + n + 2013 = 1 + 2 + 3 + ... + 2015\}$

b). Fie mulţimile:

$E = \{x / x = 2016^n + 2015^n \cdot 2017 + 2017, \ \ n \in \mathbb{N}\}$

$F = \{y / y = a^2 + 2010, \ \ a \in \mathbb{N}\}$

Să se calculeze $E \cap F$.

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	$a).\ 5^4=12^2+16^2+15^2=9^2+12^2+20^2.$	3p
	$b).\ 5^{2n+4}=5^{2n}\cdot 5^4=$	1p
	$5^{2n}\cdot\left(12^2+16^2+15^2\right)=$	1p
	$5^{2n}\cdot 12^2+5^{2n}\cdot 16^2+5^{2n}\cdot 15^2=$	1p
	$\left(5^n\cdot 12\right)^2+\left(5^n\cdot 16\right)^2+\left(5^n\cdot 15\right)^2.$	1p
2.	$\left.\begin{array}{l} x=3^{2014}\cdot 5^{2014}\cdot 5+2=15^{2014}\cdot 5+2 \\ y=3^{2014}\cdot 3\cdot 5^{2014}+2=15^{2014}\cdot 3+2 \end{array}\right\}\Rightarrow x>y;$	3p
	$\left.\begin{array}{l} x>y\Rightarrow x^{2014}>y^{2014} \\ x^{2015}=x^{2014}\cdot x\Rightarrow x^{2015}>x^{2014} \end{array}\right\}\Rightarrow x^{2015}>y^{2014}.$	2p
	$x+y=15^{2014}\cdot 5+2+15^{2014}\cdot 3+2=$	1p
	$15^{2014}\cdot 8+4=$	
	$4\cdot\left(15^{2014}\cdot 2+1\right)\Rightarrow (x+y)\vdots 4.$	1p
3.	Dacă numărul gâştelor este x, atunci numărul curcilor este $5\cdot x$, iar numărul porumbeilor este $80-6\cdot x.$	2p
	Pentru cele $5\cdot x$ curci, am primit $6\cdot x$ gâşte.	2p
	După acest schimb am $7\cdot x$ gâşte pentru care primesc la schimb $11\cdot x$ porumbei.	1p
	Aşadar, $11\cdot x+80-6x=100\Leftrightarrow 5\cdot x=20\Leftrightarrow x=4.$	1p
	Am plecat de acasă cu 4 gâşte, 20 curci şi 56 porumbei.	1p

4.	a). $\left.\begin{array}{l} n^2+n+2013=n\cdot(n+1)+2013 \\ n\cdot(n+1) \text{ este număr par (produs de numere consecutive)} \\ 2013 \text{ este număr impar} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $n^2+n+2013$ este număr impar(1)	**2p**
	$1+2+3+...+2015=2015\cdot 2016:2=2015\cdot 1008=$ număr par(2) Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ A=$\varnothing$.	**1p**
	b). Fie $n \neq 0$ $u\left(2016^n+2015^n\cdot 2017+2017\right)=u(6+5+7)=8$ (1) $u\left(a^2+2010\right)=u\left(a^2\right)\neq 8$ (2) Din (1) şi (2) $\Rightarrow E\cap F=\varnothing$.	**1p** **1p**
	Dacă $n=0 \Rightarrow x=4035 \Rightarrow E=\{4035\}$; $4035\in F$ dacă ecuaţia $a^2+2010=4035$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale $a^2+2010=4035 \Rightarrow a^2=2025 \Rightarrow a=45\in\mathbb{N}$; $a=45 \Rightarrow y=4035$ $E\cap F=\{4035\}$.	**1p** **1p**