INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 27.02.2016
Clasa a VIII-a

1. Se consideră expresia $E(x,y)=6x^2+6y^2+13xy$, unde *x* și *y* sunt numere reale.

(4p) a) Arătați că $E(x,y)\geq 25xy$, $\forall x,y\in R$.

(3p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $E(x,y)=9$.

Petru Vlad

2. (7p) Se consideră numerele reale *x*, *y*, *z*. Arătați că

$$\frac{x(x+y)}{4x^2+xy+y^2}+\frac{y(y+z)}{4y^2+yz+z^2}+\frac{z(z+x)}{4z^2+zx+x^2}\leq 1.$$

GM11/2015

3. În tetraedrul *ABCD* punctele *M* și *N* sunt picioarele perpendicularelor duse din *A* pe bisectoarele interioare ale unghiurilor *ABC*, respectiv *ACD*.

(3p) a) Dacă $AB\cdot CD=BC\cdot AC$, $BM\cap AC=\{E\}$ și $CN\cap AD=\{F\}$, arătați că $EF\parallel CD$.

(4p) b) Demonstrați că $MN\parallel(BCD)$.

***

4. Se consideră trapezul isoscel *ABCD* cu $AB\parallel CD$, $AC\cap BD=\{O\}$, $AB=40$ cm, $CD=\frac{1}{4}AB$ şi diagonalele perpendiculare. Pe planul trapezului se ridică perpendiculara *OM*, astfel încât $OM=5\sqrt{2}$ cm.

(3p) a) Calculați aria triunghiului *MCD*.

(4p) b) Determinaţi $\sin(\angle(BM,AD))$.

Corina Constantin; Cristian Săuchea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Barem de corectare OLM 2016 Clasa a VIII-a

1. a) $E(x,y) \geq 25xy \Leftrightarrow 6x^2+6y^2-12xy \geq 0$ ....
(2p)
$6(x-y)^2 \geq 0, \forall x,y \in R$ ....
(2p)
b) $E(x,y)=6x^2+4xy+6y^2+9xy=(3x+2y)(2x+3y)$ ....
(1p)
Se rezolvă sistemele corespunzătoare divizorilor lui 9 și se obțin soluțiile: $(-5,3),(3,-5),(5,-3),(-3,5)$ ....
(2p)

2. $4x^2+xy+y^2=\left(2x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2>0, \quad \forall x,y \in R$ ....
(2p)
$3x^2+3xy \leq 4x^2+xy+y^2$, deoarece $(x-y)^2 \geq 0, \quad \forall x,y \in R$ ....
(2p)
$\frac{x(x+y)}{4x^2+xy+y^2} \leq \frac{1}{3}, \quad \forall x,y \in R$ ....
(2p)
Scriind inegalitățile analoage pentru celelalte două fracții și însumându-le se obține inegalitatea cerută ....
(1p)

3. a) Conform teoremei bisectoarei $\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EC}$ și $\frac{AC}{CD}=\frac{AF}{FD}$ ....
(1p)
Deoarece $\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD}$ se obține $\frac{AE}{EC}=\frac{AF}{FD}$ ....
(1p)
Folosind reciproca teoremei lui Thales avem $EF \parallel CD$ ....
(1p)
b) BM bisectoare și înălțime $\Rightarrow$ ΔABS isoscel, unde $AM \cap BC=\{S\}$ ....
(1p)
Deci M mijlocul lui [AS] ....
(1p)
Analog N mijlocul lui [AT], unde $AN \cap CD=\{T\}$, de unde [MN] linie mijlocie în ΔAST, deci $MN \parallel ST$ ....
(1p)
$[ST] \subset (BCD) \Rightarrow MN \parallel (BCD)$ ....
(1p)

4. a) $OQ \perp CD$; conform T3$\perp$ $\Rightarrow$ $MQ \perp CD$ ....
(1p)

Se calculează $CD = 10$ cm, $OQ = 5$ cm, iar în ΔMOQ dr. în O $\Rightarrow$ $MQ = 5\sqrt{3}$ cm …....
(1p)

$A_{MCD} = \dfrac{CD \cdot MQ}{2} = 25\sqrt{3}$ cm^2 …............……………………………....…...…………

(1p)

b) $BS \parallel AD$, $S \in CD$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle\left(BM, AD\right) = \sphericalangle MBS$ ……………..……….....………........………

(1p)

$AO = BO = 20\sqrt{2}$ cm, $DO = 5\sqrt{2}$ cm, $AD = BS = 5\sqrt{34}$ cm, $OS = 25\sqrt{2}$ cm …...……
(1p)

În ΔMOB dr. în O $\Rightarrow$ $MB = 5\sqrt{34}$ cm, iar în ΔMOS dr. în O $\Rightarrow$ $MS = 10\sqrt{13}$ cm ......
(1p)

În ΔBMS isoscel $d\left(B, MS\right) = 5\sqrt{21}$ cm, apoi din $A_{BMS} = \dfrac{MS \cdot d\left(B, MS\right)}{2} =$

$\dfrac{BM \cdot BS \cdot \sin\left(\sphericalangle MBS\right)}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin\left(\sphericalangle MBS\right) = \dfrac{\sqrt{273}}{17}$ …...……..…

(1p)