INSPECTORATUL
ŞCOLAR JUDEŢEAN
M E H E D I N Ţ I

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-21 FEBRUARIE 2016

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I: a. Arătați că pentru orice număr real $a > 0$ este adevărată relația:

$$a^2 + 2 \geq 2a\sqrt{2}$$

b. Fie x, y, z numere reale strict pozitive. Arătați că: $\frac{x}{x^2+2} + \frac{y}{y^2+2} + \frac{z}{z^2+2} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$

SUBIECTUL II: Fie x, y numere reale astfel încât: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0$. Arătați că:

$$|y - x - 5| \leq 2\sqrt{2}$$

SUBIECTUL III:

Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Punctul M este mijlocul înălțimii VO, punctul N este mijlocul segmentului BM, iar $P \in [AO]$ astfel încât $AP = 3 \cdot PO$.

Demonstrați că $PN \parallel (VDC)$.

SUBIECTUL IV:

Pe muchiile (DH) și (BF) ale paralelipipedului dreptunghic $ABCDEFGH$ cu $AD = 6$ cm și $AE = 6\sqrt{3}$ cm se consideră punctele I, respectiv J astfel încât semidreapta $(AI$ să fie bisectoarea $\sphericalangle HAD$ și $A[BCGJ] = 5A[GFJ]$

a. Arătați că punctele A, I, G, J sunt vârfurile unui paralelogram.

b. Determinați unghiul format de dreapta GJ cu planul $(ABCD)$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-21 FEBRUARIE 2016
Clasa a VIII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

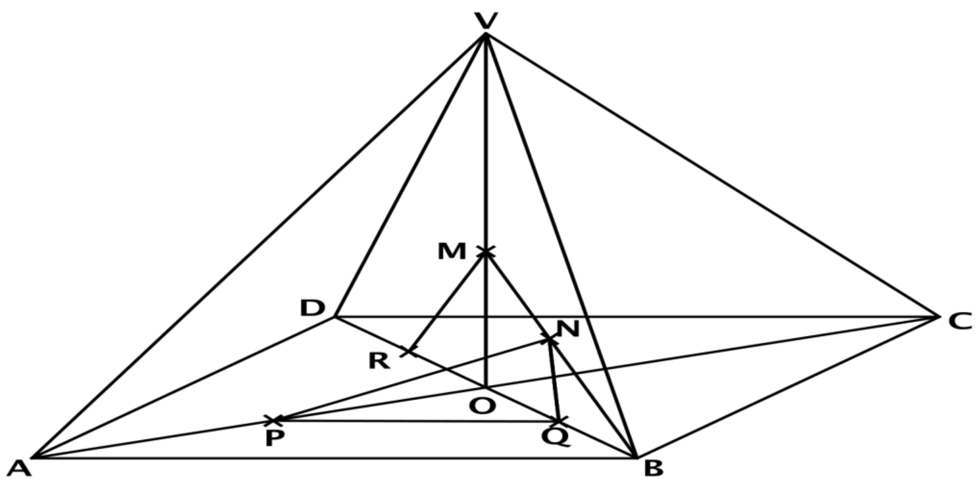
SUBIECTUL I

a. $a^2+2\geq 2a\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2-2a\sqrt{2}+2\geq 0\Leftrightarrow$	**2p**
$\Leftrightarrow a^2-2a\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow\left(a-\sqrt{2}\right)^2\geq 0$	**1p**
b. Din punctul a. rezultă: $x^2+2\geq 2x\sqrt{2}\Rightarrow\frac{x^2+2}{x}\geq 2\sqrt{2}\Rightarrow\frac{x}{x^2+2}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$	**2p**
Analog: $\frac{y}{y^2+2}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{z}{z^2+2}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$. **Prin adunare:**	
$\frac{x}{x^2+2}+\frac{y}{y^2+2}+\frac{z}{z^2+2}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$	**2p**

SUBIECTUL II

Relația se scrie: $(x+2)^2+(y-3)^2=2\Rightarrow(x+2)^2\leq 2\Rightarrow$	**1p**
$\Rightarrow-\sqrt{2}\leq x+2\leq\sqrt{2}\quad(1)$	**2p**
$(y-3)^2\leq 2\Rightarrow-\sqrt{2}\leq y-3\leq\sqrt{2}\quad(2)$	**1p**
Înmulțim (1) cu $-1\Rightarrow-\sqrt{2}\leq -x-2\leq\sqrt{2}$	**1p**
și adunăm cu (2) $\Rightarrow-2\sqrt{2}\leq y-x-5\leq 2\sqrt{2}$, $\lvert y-x-5\rvert\leq 2\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL III

	**1p**
Ducem $PQ\parallel AB\Rightarrow\frac{OQ}{QB}=\frac{OP}{PA}=\frac{1}{3}$	**1p**
$QO=a\Rightarrow BQ=3a; OB=OD=4a$	**1p**
$OR=2a; RQ=3a$. **Rezultă** $RQ=QB$.	**1p**
În $\Delta\,BMR, NQ$ **linie mijlocie** $\Rightarrow NQ\parallel MR$	**1p**
În $\Delta\,VOD, MR$ **linie mijlocie** $\Rightarrow MR\parallel VD$	**1p**
$\Rightarrow NQ\parallel VD$ **și Din** $PQ\parallel CD\Rightarrow(PQN)\parallel(VDC)$	
Dar $NP\subset(PQN)\Rightarrow PN\parallel(VDC)$	**1p**

SUBIECTUL IV

a. $A[BCGJ] = 5A[GJF]$, $\frac{(BJ+GC)\cdot BC}{2} = 5\cdot\frac{GF\cdot FJ}{2}$, $BJ + GC = 5FJ \Rightarrow 2BJ + FJ = 5FJ$ **1p**

$\Rightarrow BJ = 2FJ; FJ = 2\sqrt{3}; BJ = 4\sqrt{3}$

În $\Delta\, AHE$: $AH^2 = EH^2 + EA^2 = 6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = 144; AH = 12$ **1p**

Din teorema bisectoarei: $\frac{HI}{ID} = \frac{AH}{AD} = \frac{12}{6} = 2$

$$\frac{HI}{HI+ID} = \frac{2}{2+1} \Rightarrow \frac{HI}{6\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \Rightarrow HI = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

1p

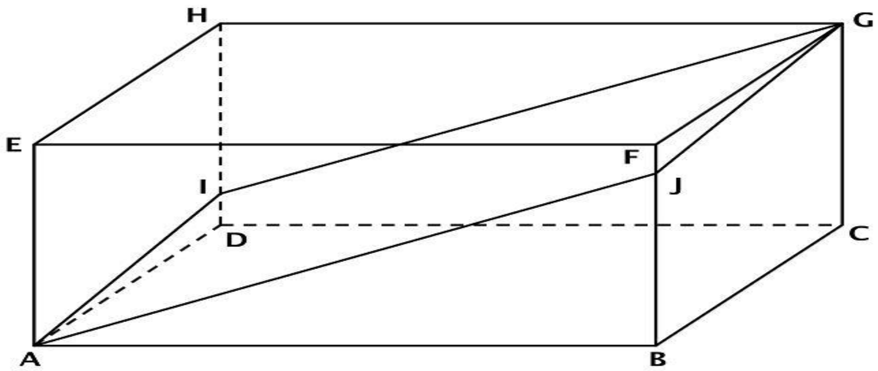
$$\left.\begin{matrix} HI = BJ = 4\sqrt{3} \\ AB = HG \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta\, HIG \equiv \Delta\, ABJ$$

$$\Rightarrow AJ = IG \ (1)$$

$$\left.\begin{matrix} ID = FJ = 2\sqrt{3} \\ AD = FG \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta\, ADI \equiv \Delta\, FGJ$$

$$\Rightarrow GJ = AI \quad (2)$$ **1p**

Din (1); (2) $\Rightarrow AJGI -$ **paralelogram**



b.

$$\Delta LJB \sim \Delta LGC \rightarrow \frac{JB}{GC} = \frac{LB}{LC}$$ **2p**

$$\frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{LB}{LB+BC} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{LB}{LB+6} \rightarrow 2LB + 12 = 3LB \rightarrow LB = 12$$

$$tg(\sphericalangle JLB) = \frac{JB}{LB} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow m(\sphericalangle JLB) = 30^\circ$$

1p