OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14.02.2015
Clasa a VII-a

1. a) Arătați că $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}>\sqrt{2015}$.

b) Fie $x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+...+\frac{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}{\sqrt{2015\cdot 2014}}$. Determinați $\left[x\sqrt{2015}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

* * *

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2+b^2=c^2$ și a ≤ b. Arătați că:

a) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\notin\mathbb{Q}$;

b) dacă $a\not\vdots\, 5, b\not\vdots\, 5$ și $\text{cmmdc}(a,b)=1$, atunci $\sqrt{a^2b^2+c^2}\in\mathbb{N}$.

profesor Laurențiu Țibrea

3. În paralelogramul *ABCD*, considerăm $AC\cap BD=\{O\}$, $M,N\in(AC)$ astfel încât *A-M-N* și $(AM)\equiv(NC)$. Dacă $DM\cap BC=\{L\}$ și $BN\cap CD=\{T\}$, arătați că:

a) $(DN)\equiv(BM)$;

b) *L*, *O*, *T* sunt coliniare.

* * *

4. În triunghiul *ABC* cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ și $m(\sphericalangle C)=30^\circ$, considerăm bisectoarea [*BE*, $E\in[AC]$ și un punct *D* pe $[BC]$ astfel încât $BC=3\cdot BD$. Dacă $\{O\}=BE\cap AD$ și *F* este mijlocul lui $[AB]$, arătați că *F*, *O* și *C* sunt coliniare.

GM 11/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.