OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală

Clasa a X- a

21 Februarie 2016

SUBIECTUL I (7p)

2p a) Demonstrați că:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}, \forall k,n \in \mathbb{N}^*, k \le n.$$

5p b) Ordonați crescător numerele:

$$1+\frac{1}{n}, \log_n(n+1), \log_{n+1}(n+2), \text{ pentru } n \ge 3.$$

SUBIECTUL II (7p)

Fie mulțimea $A=\left\{a+b\sqrt{3} / a,b \in Z, a^2-3b^2=1\right\}$. Demonstrați că:

1p a) $x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in A$;

2p b) $x \in A \Rightarrow x^n+\frac{1}{x^n} \in Z, \forall n \in N$;

4p c) există numere din A care au primele 100 de zecimale egale cu 9.

SUBIECTUL III (7p)

Fie $z \in \mathbb{C}$ care satisface ecuația $(z+i)^{10}+i(z-i)^{10}=0$. Să se arate că:

1p a) $|z+i|=|z-i|$;

2p b) $z \in \mathbb{R}$

4p c) Să se rezolve ecuația.

SUBIECTUL IV (7p)

Fie $z, z' \in \mathbb{C}$ cu $|z|=|z'|=1$. Să se arate că:

7p) $\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)^{2n}+\left(\frac{z-z'}{1-zz'}\right)^{2n} \ge \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, zz' \neq \pm 1.$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

Str. N. Iorga Nr. 28, 710213, Botoșani
Tel: +40 231 584050/ fax: +40 231 584052
email: office.isjbt@gmail.com
www.isjbotosani.ro

Str. General Berthelot Nr. 28-30
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05, www.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, februarie 2016
Clasa a X-a
Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL I (7p)

a) Demonstrați că:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}, \forall k,n \in \mathbb{N}^*, k \leq n.$$

b) Ordonați crescător numerele:

$$1+\frac{1}{n}, \log_n(n+1), \log_{n+1}(n+2) \text{, pentru } n \geq 3.$$

a) Demonstratia prin inductie a inegalitatii...2p

b) $l\log_n(n+1) < 1+\frac{1}{n} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$,adevărată pt $n \geq 3$ (se obtine din punctul a) ..**2p**

c) $\log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1) \Leftrightarrow (\log_{n+1} n)\log_{n+1}(n+2) < 1$..1p

Aplicarea inegalitatii mediilor 1p

Finalizare: $\log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1) < 1+\frac{1}{n}$ 1p

SUBIECTUL II (7p)

Fie mulțimea $A = \left\{a+b\sqrt{3} / a,b \in Z, a^2-3b^2=1\right\}$. **Demonstrați că:**

a) $x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in A$;

b) $x \in A \Rightarrow x^n + \frac{1}{x^n} \in Z, \forall n \in N$;

c) **există numere din *A* care au primele 100 de zecimale egale cu 9.**

a) $\frac{1}{a+b\sqrt{3}} = a-b\sqrt{3}$ **1p**

b) Se demonstreaza prin inductie.. **2p**

c) Fie $x = 2+\sqrt{3} \in A$. Evident $x > 1$ si $x^n \notin \square$. Exista $n \in N$, de exemplu, $n = \left[\frac{100}{\lg x}\right]+1$ astfel ca

$\frac{1}{x^n} < \frac{1}{10^{100}}$ **2p**

Cum ,din b), $x^n + \frac{1}{x^n} = p \in N \Rightarrow \left[x^n\right] = p-1 si \left\{x^n\right\} = 1-\frac{1}{x^n} > \frac{10^{100}-1}{10^{100}} = 0,\underbrace{99...9}_{100}$ ……**2p**

Str. N. Iorga Nr. 28, 710213, Botoşani
Tel: +40 231 584050/ fax: +40 231 584052
email: office.isjbt@gmail.com
www.isj2.botosani.ro

Str. General Berthelot Nr. 28-30
Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05, www.edu.ro

SUBIECTUL III (7p)

Fie $z \in \mathbb{C}$ care satisface ecuația $(z+i)^{10} + i(z-i)^{10} = 0$. Să se arate că:

a) $|z+i| = |z-i|$;

b) $z \in \mathbb{R}$

c) Să se rezolve ecuația.

a) Se separa termenii si se trece la module..1p

b) Se foloseste a) sau ca, imaginea lui z este egal departata de imaginea lui i si (–i).........2p

c) Ecuatia este echivalenta cu $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = -i$ 1p

Forma trigonometrica a lui i 1p

Multimea solutiilor este $\left\{ctg\frac{4k\pi+3\pi}{40} / k \in \{0,1,2,...,9\}\right\}$...3p

SUBIECTUL IV (7p)

Fie $z, z' \in \mathbb{C}$ cu $|z| = |z'| = 1$. Să se arate că:

$\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)^{2n} + \left(\frac{z-z'}{1-zz'}\right)^{2n} \geq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, zz' \neq \pm 1.$

$z = \cos a + i\sin a, z' = \cos b + i\sin b$.........$1p$

$A = \frac{z+z'}{1+zz'} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}, B = \frac{z-z'}{1-zz'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, unde $\alpha = \frac{a-b}{2}, \beta = \frac{a+b}{2}$....................**2p**

$A^{2n} + B^{2n} \geq 2\left(\frac{A^2+B^2}{2}\right)^n \geq \frac{2}{2^n}\left(\cos^2\alpha + \sin^2\beta\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$ **4p**

Orice alta solutie se ia in considerare.

Str. N. Iorga Nr. 28, 710213, Botoșani
Tel: +40 231 584050/ fax: +40 231 584052
email: office.isjbt@gmail.com
www.isj2.botosani.ro

Str. General Berthelot Nr. 28-30
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05, www.edu.ro