Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 15 februarie 2014, Clasa a XII a

1. Pe mulţimea $M=(0,\infty)$ se defineşte legea de compoziţie "$*$" care satisface următoarele proprietăţi:

a) $(x*y)\cdot(x*z)=x*(y+z), \forall x,y,z\in M$;

b) $x*1=x, \forall x\in M$.

Să se calculeze $4*\frac{1}{4}$ şi $\sqrt{2014}*2014$.

Lucian Dragomir , RMT 1/2006

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit de ordin n şi $f:G\to G$ un morfism cu proprietăţile:

a) $f\circ f=\mathbf{1}_G$; b) $f(x)=x\Rightarrow x=e$.

Să se arate că: 1) $\left\{f(x)\cdot x^{-1}/x\in G\right\}=G$;

2) G este abelian;

3) n este impar.

Dorel Miheţ

3. a) Dacă $F:\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei $f:\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$

pentru care $F(0)=0$, calculaţi $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Determinaţi funcţiile derivabile $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admit o primitivă $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

pentru care $G(x)=\frac{x\cdot g(x)}{2}, \ \forall x\in\mathbb{R}.$

* * *

4. a) Demonstraţi că $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}, \ \forall x>0$.

b) Calculaţi $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

GM 2007

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

(1) Din (1),pentru $y=z=\frac{1}{2}$, folosind (2), deducem că $x*\frac{1}{2}=\sqrt{x},\forall x>0$.	(2p)
Pentru $y=z=\frac{1}{4}$ în (1) obţinem $\left(x*\frac{1}{4}\right)^2=x*\frac{1}{2}=\sqrt{x}\Rightarrow x*\frac{1}{4}=\sqrt[4]{x}\Rightarrow 4*\frac{1}{4}=\sqrt{2}$.	(2p)
Dacă în (1) punem $y=z=1$,avem $x^2=x*2$,apoi $y=2,z=1$ conduce la $x^3=x*3$; se demonstrează imediat prin inducţie că $x^n=x*n,\forall x>0,n\in\mathbb{N}^*$, aşadar rezultatul căutat este 2014^{1007}.	(3p)
(2) (1) Se consideră funcţia $g:G\to G, g(x)=f(x)\cdot x^{-1}$ şi se arată destul de repede că este injectivă;deoarece G este finită, avem că funcţia este şi surjectivă, de unde concluzia este imediată;	(3p)
2) Aşadar,pentru $y\in G$ arbitrar,există $x\in G$ astfel încât $g(x)=y$,de unde $f(y)=f(f(x)\cdot x^{-1})=x\cdot f(x^{-1})=\left(f(x)\cdot x^{-1}\right)^{-1}=y^{-1}$;ajungem astfel la $f(xy)=f(x)f(y)\Leftrightarrow(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}$ sau $xy=yx,\forall x,y\in G$;	(2p)
3) Dacă $x\neq e$,avem $f(x)\neq x\Rightarrow x\neq x^{-1}$ şi astfel toate submulţimile de forma $\{x,x^{-1}\}$ formează o partiţie a lui $G\setminus\{e\}$,ale cărei clase conţin toate câte două elemente,adică $G\setminus\{e\}$ conţine un număr par de elemente,concluzia fiind imediată şi aici.	(2p)
(3)a) Notăm $A=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ şi considerăm $B=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; determinăm $B-A$ şi $B+A$, de unde $A=\frac{x-\ln\lvert\sin x+\cos x\rvert}{2}+\mathcal{C}=F(x)$	(2p)
$F(0)=0\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$	(1p)
b) derivând egalitatea dată obţinem $2g(x)=g(x)+xg'(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)=xg'(x),\forall x\in\mathbb{R}$	(2p)
Deducem că, pentru $x\neq 0$, avem $\left(\frac{g(x)}{x}\right)'=0\Rightarrow g(x)=\begin{cases}ax, & x<0\\ b, & x=0\\ cx, & x>0\end{cases}$	(1p)
Deoarece g este continuă se ajunge la $b=0,a=c\in\mathbb{R}$, deci $g(x)=ax,x\in\mathbb{R}$	(1p)
(4) a) Se consideră $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ şi deoarece $f'(x)=0\Rightarrow f(x)=k,\forall x>0$; cum $f(1)=\frac{\pi}{2}$, concluzia este evidentă	(3p)
b) se foloseşte schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{t}$ şi imediat se obţine că integral este egală cu $\frac{\pi}{2}\ln 2$	(4p)