Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a VII-a

1. **a)** Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$ direct proporţionale cu $3, 4$ şi respectiv 5. Demonstraţi că numărul $\dfrac{10a+b+4c}{a+b-c}$ este cub perfect.

b) Demonstraţi că numărul $\sqrt{2012^{2013}+2013^{2012}}$ este iraţional.

2. Fie triunghiul $\triangle ABC$ în care $AB < AC$. Fie $D \in (AB$, $B \in (AD)$ şi $E \in (AC$, $C \in (AE)$ astfel încât $[BD] \equiv [CE]$. Perpendicularele din B şi D pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ intersectează dreapta AC în F şi, respectiv G.

a) Demonstraţi că triunghiul $\triangle ABF$ este isoscel;

b) Demonstraţi că $[FG] \equiv [CE]$.

3. Fie numerele reale a, b, c, d, e astfel încât $|a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-e| = |e-a|$. Demonstraţi că $a = b = c = d = e$.

Gazeta Matematică – nr.10/ 2012

4. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu baza mare AB şi $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^\circ$. Demonstraţi inegalităţile:

a) $AB - CD > BC - AD$;

b) $AB + AC > DB + DC$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 16 februarie 2013

Clasa a VII-a - barem

1. a) Cu notaţia $a=3k, b=4k$ şi $c=5k$, numărul $\frac{10a+b+4c}{a+b-c}$ devine egal cu $27=3^3$ **3p**

b) $u\left(2012^{2013}\right)=2$, $u\left(2013^{2012}\right)=1$, deci numărul de sub radical nu e pătrat perfect. **4p**

2. a) Figura **1p**

Triunghiul $\triangle ABF$ este isoscel deoarece bisectoarea din A este şi înălţime. **3p**

b) Analog şi triunghiul $\triangle ADG$ este isoscel şi atunci $[FG]\equiv[BD]\equiv[CE]$. **3p**

3. Notăm cu k valoarea comună a celor 5 module. **1p**

Avem $a-b=\pm k$ şi analoagele. **2p**

Adunând toate cele 5 relaţii se obţine $0=\pm k\pm k\pm k\pm k\pm k$, de unde singura posibilitate este $k=0$ şi apoi concluzia. **4p**

4. a) Construim înălţimea CM **1p**

Avem $MB>BC-AD \Rightarrow AB-CD>BC-AD$. **2p**

b) Patrulaterul $ABCM$ este dreptunghi $\Rightarrow DM=AC$. **1p**

$DM+MB>BD$. **1p**

Finalizare . **2p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro