COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2013

Clasa a XII-a

1. a) Demonstrați că arctg x + arctg $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x > 0$.

b) Pentru $a > 1$, calculați $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{arctgx}{x}\, dx$.

2. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & f(x) \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in (0,\infty) \right\}$. Determinați funcțiile *f* pentru care *M* este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodică, neconstantă și care admite primitive.

a) Demonstrați că orice primitivă a funcției *f* se poate scrie ca sumă dintre o funcție periodică și o funcție de tipul $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ G(x) = ax$, unde $a\in\mathbb{R}$.

b) Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției *f*, calculați $L = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

c) Arătați că nu există limita $\lim\limits_{x\to\infty}(F(x) - Lx)$.

Radu Gologan

4. Fie *G* un grup de ordin $n, n \geq 4$, cu proprietatea că există $m\in\mathbb{N}, 1 < m < n$, astfel încât *G* conține exact C_{n-1}^{m-1} subgrupuri de ordin m. Demonstrați că grupul *G* este abelian.

Marius Tărnăuceanu, Recreații Matematice 1/2009

Subiect elaborat de prof. Gabriel Popa

Clasa a XII-a

1. a) Derivata funcției $f(x)$ = arctg x + arctg$\frac{1}{x}$, $x>0$, este nulă, aşadar f este constantă pe $(0,\infty)$. Cum $f(1) = \frac{\pi}{2}$, rezultă că $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x>0$.

b) Dacă $I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{arctgx}{x}dx$, cu schimbarea de variabilă $\frac{1}{x}=t$ obținem că $I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{arctg\frac{1}{t}}{t}dt$,

deci $I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{arctgx+arctg\frac{1}{x}}{x}dx = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\pi}{2x}dx = \frac{\pi}{2}\ln x\Big|_{\frac{1}{a}}^{a} = \pi\ln a$, prin urmare $I = \frac{\pi\ln a}{2}$.

2. Se observă că $A(x)\cdot A(y) = \begin{pmatrix} xy & xf(y)+yf(x) \\ 0 & xy \end{pmatrix}$. Cum $A(x)\cdot A(y)=A(xy)$, rezultă că $f(xy)=x\cdot f(y)+y\cdot f(x),\forall x\in(0,\infty)$.

Cu notația $g(x)=\frac{f(x)}{x}, x>0$, obținem că funcția continuă g verifică ecuația funcțională $g(xy)=g(x)+g(y),\forall x\in(0,\infty)$. Atunci $g(x)=k\log_a x$, aşadar $f(x)=kx\log_a x$, $\forall x\in(0,\infty)$, unde $k\in\mathbb{R}, a\in(0,1)\cup(1,\infty)$.

Pentru funcțiile f de această formă, se verifică imediat axiomele grupului.

3. a) Fie F o primitivă a lui f; căutăm $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $H(x)=F(x)-ax$ să fie periodică. Observăm întâi că funcția $g(x)=F(x+T)-F(x)$ are derivata nulă, deci este constantă, adică $F(x+T)-F(x)=k,\forall x\in\mathbb{R}$. Condiția $H(x+T)=H(x),\forall x\in\mathbb{R}$ revine la $aT=k$, unde $k=\frac{F(T)-F(0)}{T}$, deci este suficient să luăm $a=\frac{k}{T}$.

b) Aplicând regula lui l'Hospital (cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$) şi ținând seama de punctul a), obținem că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=k$.

c) H este periodică şi neconstantă, deci nu există $\lim\limits_{x\to\infty}H(x)$.

4. Considerăm submulțimile lui G care conțin elementul neutru e şi încă $m-1$ elemente din $G\setminus\{e\}$. Numărul acestor submulțimi este C_{n-1}^{m-1}, deci toate aceste submulțimi sunt subgrupuri ale lui G.

Dacă, prin absurd, $m>2$, atunci există $x,y\in G\setminus\{e\}, x\neq y$; cum $n-3\geq m-2\geq 1$, putem alege $m-2$ elemente distincte din $G\setminus\{e\}$, fie acestea $a_1,a_2,...,a_{m-2}$. Notăm

$H_1 = \{e, x, a_1, a_2, ..., a_{m-2}\}$ şi $H_2 = \{e, y, a_1, a_2, ..., a_{m-2}\}$. Avem că $xa_1 \in H_1$ (deoarece H_1 este sugrup), $xa_1 \neq e$ (altfel $x = a_1^{-1} \in H_2$), $xa_1 \neq x$ (în caz contrar, $a_1 = e$) şi $xa_1 \neq a_i, i = \overline{2, m-2}$ (altfel $x = a_i a_1^{-1} \in H_2$).

Contradicția la care am ajuns arată că $m = 2$, deci $a^2 = e, \forall a \in G$. Această condiție conduce la comutativitatea lui G.