OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 ianuarie 2016

CLASA A XII-A

1.) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ 1+x, & x>0\end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

2.) Determinați primitiva F a funcției $f:(0,\pi)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x\sin^3 x+\cos x}{\sin^2 x}\cdot e^{\cos x}$ pentru care $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}-1$.

3.) Pe mulțimea $G=(-1,1)$ definim operația $x\circ y=\dfrac{ax+by}{1+xy},\ \forall x,y\in G$.
Determinați numerele reale a și b pentru care $(G,\circ)$ este grup.

4.) Fie R_n mulțimea resturilor obținute prin împărțire la n, $n\in N, n\ge 2$.
Pe R_n definim operația " $\otimes$ " astfel: $a\otimes b=ab(\mathrm{mod}\, n)$, adică restul obținut prin împărțirea produsului la n. Fie S_n suma elementelor din tabla operației " $\otimes$ ", de exemplu pentru $n=4$ avem :

$\otimes$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

și $S_4 = 16$. Calculați valoarea lui S_{24}.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

BAREM

CLASA A XII-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	Presupunem că funcția f admite primitive de forma: $F(x)=\begin{cases}-\cos x+c_1, x\le 0\\ x+\dfrac{x^2}{2}+c_2, x>0\end{cases}$	**3p**
	Din F continuă în $x=0$ obținem: $-1+c_1=c_2$	**2p**
	Deci $F(x)=\begin{cases}-\cos x+c_1, x\le 0\\ x+\dfrac{x^2}{2}+c_1-1, x>0\end{cases}$	**1p**
	Din $F_s^{'}(0)=0$ și $F_d^{'}(0)=1 \Rightarrow F_s^{'}(0)\neq F_d^{'}(0)$, deci F nu este derivabilă în punctul $x=0$.	**2p**
	Contradicție, din care rezultă că funcția f nu admite primitive	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	$F(x)=\int x\sin x\cdot e^{\cos x}dx+\int\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot e^{\cos x}dx$	**1p**
	Fie $I_1=\int x\sin x\cdot e^{\cos x}dx$ și $I_2=\int\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot e^{\cos x}dx$	**1p**
	Utilizând metoda integrării prin părți obținem: $I_1=\int x\sin x\cdot e^{\cos x}dx=\int x\left(-e^{\cos x}\right)^{'}dx=-x\cdot e^{\cos x}+\int e^{\cos x}dx$	**2p**
	$I_2=\int\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot e^{\cos x}dx=\int\left(-\dfrac{1}{\sin x}\right)^{'}\cdot e^{\cos x}dx=-\dfrac{e^{\cos x}}{\sin x}-\int e^{\cos x}dx$	**2p**
	Avem: $F(x)=I_1+I_2=-x\cdot e^{\cos x}+\int e^{\cos x}dx-\dfrac{e^{\cos x}}{\sin x}-\int e^{\cos x}dx=-x\cdot e^{\cos x}-\dfrac{e^{\cos x}}{\sin x}+C$	**1p**
	Din $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}-1$ obținem $C=0$ și $F:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $F(x)=-\dfrac{x\sin x+1}{\sin x}e^{\cos x}$	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	Dacă e este elementul neutru al grupului $x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in G$	**1p**
	Din $x\circ e=x$, pentru $x=0$ avem $be=0$	**1p**
	Dacă $e\neq 0$ obținem $b=0$	**1p**
	Dar pentru $b=0$ avem $ax=x+ex^2,\ \forall x\in G$ ceea ce este imposibil, deci $e=0$	**2p**
	Astfel pentru $e=0$ avem $ax=x,\ \forall x\in G$ de unde $a=1$	**1p**
	Din $0\circ x=x,\ \forall x\in G$ obținem $bx=x,\ \forall x\in G$ de unde $b=1$	**1p**
	Pentru $a=1$ și $b=1$ se verifică axiomele grupului	**2p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	Obţinem sume diferite pe anumite rânduri în funcţie de c.m,m.d.c. al numărului din faţa liniei şi 24. Notăm cu *a* numărul din faţa unui rând.	**1p**
	Dacă $(24,a)=1$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $1+2+...+23=276$, şi avem 8 astfel de rânduri: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.	**1p**
	Dacă $(24,a)=2$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0+2+4+...+22)\cdot 2=264$, şi avem 4 astfel de rânduri: 2, 10, 14, 22.	**1p**
	Dacă $(24,a)=3$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0+3+6+...+21)\cdot 3=252$, şi avem 4 astfel de rânduri: 3, 9, 15, 21.	**1p**
	Dacă $(24,a)=4$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0+4+8+16+20)\cdot 4=240$, şi avem 2 astfel de rânduri: 4 şi 20.	**1p**
	Dacă $(24,a)=6$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0+6+12+18)\cdot 6=216$, şi avem 2 astfel de rânduri: 6 şi 18.	**1p**
	Dacă $(24,a)=8$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0+8+16)\cdot 8=192$, şi avem 2 astfel de rânduri: 8 şi 16.	**1p**
	Dacă $(24,a)=12$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0+12)\cdot 12=144$, şi avem un singur astfel de rând: 12.	**1p**
	Alte posibilităţi nu sunt, deci $S_{24}=8\cdot 276+4\cdot 264+4\cdot 252+2\cdot 240+2\cdot 216+2\cdot 192+144=5712$	**1p**