

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VII-a

Problema 1. Determinați numerele naturale \overline{ab} care verifică relația $\sqrt{a + \sqrt{ab}} = a$.

Gazeta Matematică nr. 1/2014

Problema 2. Determinați numărul real x pentru care

$$[x + 2013] + 3\{x\} = 2014,$$

unde $[a]$ este partea întreagă, iar $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a .

Carmen Firicescu, Corabia

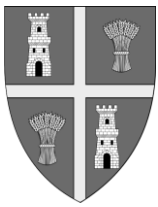
Problema 3. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 3AD$. Fie $E \in (AB)$ și $F \in (CD)$ astfel încât $[AE] \equiv [AD] \equiv [DF]$. Dacă $\{M\} = BD \cap EF$, arătați că dreapta CM trece prin mijlocul segmentului $[AD]$.

Costel Anghel, Negreni

Problema 4. Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (BC)$, $D \in (AM)$. Prin punctele D , respectiv C , se construiesc paralele la AB , respectiv AM , care se intersectează în E . Știind că AE este paralelă cu BD , demonstrați că M este mijlocul lui $[BC]$.

Ion Neață, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VII-a

Soluții și bareme de corectare

1. Se ridică relația la pătrat și se obține: $\sqrt{ab} = a^2 - a$ 1p
 Din a cifra avem : $a^2 - a \in \{0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 60, 72\}$ 1 p.
 Din $a^2 - a \in N \Rightarrow \sqrt{ab} \in N \Rightarrow \overline{ab}$ patrat perfect 1p
 Dacă $a=1$ atunci $\sqrt{1b}=0$, nu există soluție 1p
 Dacă $a=2$ atunci $\sqrt{2b}=2$, nu există soluție 1p
 Dacă $a=3$ atunci $\sqrt{3b}=6$, există $\overline{ab}=36$ 1p
 Dacă $a>3$ obținem numere de două cifre care sunt rădăcini pătrate ale unor numere de cel puțin trei cifre, ori \overline{ab} are doar două cifre, deci nu mai sunt soluții. 1p
2. Să se determine numărul real x pentru care: $[x + 2013] + 3\{x\} = 2014$

$$[x + 2013] + 3\{x\} = 2014 \Leftrightarrow [x] + 2013 + 3\{x\} = 2014 \Leftrightarrow [x] + 3\{x\} = 1 \Rightarrow 3\{x\} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \{x\} \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} \dots \dots \dots 3p$$

$$\{x\} = 0 \Leftrightarrow [x] = 1 \Leftrightarrow x = 1 \dots \dots \dots 1p$$

$$\{x\} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow [x] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \dots \dots \dots 1p$$

$$\{x\} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow [x] = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \dots \dots \dots 2p$$

3. AEFD patrat $\Rightarrow FM \parallel AD \xRightarrow{tfa} \Delta FDM \sim \Delta CDB \Rightarrow \frac{DF}{DC} = \frac{DM}{DB} = \frac{1}{3} \dots \dots \dots 2p$

ABCD dreptunghi $\Rightarrow DB=2 DO \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{DM}{2DO} \Rightarrow \frac{DM}{DO} = \frac{2}{3} \dots \dots \dots 1p$

În ΔDAC avem DO mediană și $\frac{DM}{DO} = \frac{2}{3} \Rightarrow M$ centru de greutate al ΔDAC 2p

Atunci CM este mediană a ΔDAC și întâlnește AD în mijlocul ei 2p

4. Din $AE \parallel BD$ și $AB \parallel ED \Rightarrow AEDB$ paralelogram $\Rightarrow AE=BD, AB=ED$ 1p

Fie $BD \cap CE = \{N\} \Rightarrow AE \parallel DN$ și $AD \parallel EN \Rightarrow AEND$ paralelogram \Rightarrow

$AE = DN$ 3p

Din $AE=BD$ și $AE=DN \Rightarrow D$ mijlocul $[BN]$ 1p

Din D mijlocul $[BN]$ și $DM \parallel CN \Rightarrow$

$[DM]$ linie mijlocie în $\Delta BCN \Rightarrow M$ mijlocul $[BC]$ 2p