OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VII-a

Problema 1. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ care verifică relaţia $\sqrt{a+\sqrt{\overline{ab}}}=a$.

Gazeta Matematică nr. 1/2014

Problema 2. Determinați numărul real *x* pentru care

$$[x+2013]+3\{x\}=2014,$$

unde $[a]$ este partea întreagă, iar $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real *a*.

Carmen Firicescu, Corabia

Problema 3. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB=3AD$. Fie $E\in(AB)$ şi $F\in(CD)$ astfel încât $[AE]\equiv[AD]\equiv[DF]$. Dacă $\{M\}=BD\cap EF$, arătaţi că dreapta CM trece prin mijlocul segmentului [*AD*].

Costel Anghel, Negreni

Problema 4. Fie triunghiul *ABC* şi punctele $M\in(BC)$, $D\in(AM)$. Prin punctele *D*, respectiv *C*, se construiesc paralele la *AB*, respectiv *AM*, care se intersectează în *E*. Ştiind că *AE* este paralelă cu *BD*, demonstrați că *M* este mijlocul lui [*BC*].

Ion Neaţă, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VII-a

Soluţii şi bareme de corectare

1. Se ridica relatia la patrat si se obtine: $\sqrt{\overline{ab}}=a^2-a$…………………1p
   Din a cifra avem : $a^2-a \in \{0,2,6,12,20,30,42,60,72\}$………………1 p.
   Din $a^2-a \in N \Rightarrow \sqrt{\overline{ab}} \in N \Rightarrow \overline{ab}\ patrat\ perfect$……………………..1p
   Daca a=1 atunci $\sqrt{\overline{1b}}$=0, nu exista solutie…………………………..1p
   Daca a=2 atunci $\sqrt{\overline{2b}}$=2, nu exista solutie……………………………..1p
   Daca a=3 atunci $\sqrt{\overline{3b}}$=6, exista $\overline{ab}$=36…………………………………1p
   Daca a>3 obtinem numere de doua cifre care sunt radacini patrate ale unor numere de cel putin trei cifre, ori $\overline{ab}$ are doar doua cifre, deci nu mai sunt solutii.
   ………………………………………………………………1p

2. Sa se determine numarul real *x* pentru care: [*x* + 2013] + 3{*x*} = 2014

[*x* + 2013] + 3{*x*} = 2014 ⇔ [*x*] + 2013 + 3{*x*} = 2014 ⇔ [*x*] + 3{*x*} = 1 ⇒ 3{*x*} ∈ **Z** ⇔ {*x*} ∈ $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$……………………………………………………………………..3p

$\{x\}=0 \leftrightarrow [x]=1 \leftrightarrow x=1$ ……………………………………………………..1p

$\{x\}=\frac{1}{3} \leftrightarrow [x]=0 \leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ………………………………………………………1p

$\{x\}=\frac{2}{3} \leftrightarrow [x]=-1 \leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ ……………………………………………………..2p

3. AEFD patrat$\Rightarrow FM||AD \underset{tfa}{\Longrightarrow} \Delta FDM \sim \Delta CDB \Rightarrow \frac{DF}{DC}=\frac{DM}{DB}=\frac{1}{3}$ … … … … … … … .2p
   ABCD dreptunghi⇒DB=2 DO$\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{DM}{2DO} \Rightarrow \frac{DM}{DO}=\frac{2}{3}$………………………1p
   In ΔDAC avem DO mediana si $\frac{DM}{DO}=\frac{2}{3} \Rightarrow M$ centru de greutate al ΔDAC 2p
   Atunci CM este mediana a ΔDAC si intalneste AD in mijlocul ei………..2p
4. Din AE||BD si AB||ED⇒AEDB paralelogram⇒AE=BD,AB=ED………….1p
   Fie BD$\cap CE=\{N\} \Rightarrow AE||DN\ si\ AD||EN \Rightarrow AENDparalelogram \Rightarrow$
   $AE=DN$.. ………………………………………………………………….3p

   Din AE=BD si AE=DN⇒D mijlocul [BN]………………………………………1p

   Din D mijlocul [BN] si DM||CN⇒

   $[DM]$ linie mijlocie in ΔBCN$\Rightarrow M\ mijlocul\ [BC]$……………………………2p