Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Iaşi
14.02.2014

CLASA a V-a

Problema 1. Aflați ultima cifră a numărului $n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{2014}$.

Problema 2. Arătați că numărul $\overline{abcdef} \cdot 10^6 + \overline{fedcba}$ este divizibil cu 11.

Problema 3. Intercalați numărul $\overline{xy}$ între cifrele numărului 111, astfel încât să se obțină un pătrat perfect de cinci cifre.

Problema 4. Un elev are 144 bile, pe care le distribuie în patru cutii, respectând următoarele reguli:
a) numărul bilelor din prima cutie diferă prin 4 de numărul bilelor din a doua cutie;
b) numărul bilelor din a doua cutie diferă prin 3 de numărul bilelor din a treia cutie;
c) numărul bilelor din a treia cutie diferă prin 2 de numărul bilelor din a patra cutie;
d) în prima cutie se află cele mai multe bile.
Care este numărul maxim de bile pe care elevul le poate pune în a doua cutie?

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, Iaşi
14.02.2014

CLASA a V-a

Baremul de corectare și notare

Problema 1. $uc(2^x) \in \{2,4,6,8\}, x \in \mathbb{N}^*$ 1p

$uc(2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}) = 0, x \in \mathbb{N}^*$ 2p

$uc(2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = uc(2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) = ... = uc(2^{2009} + 2^{2010} + 2^{2011} + 2^{2012}) = 0$ 2p

$uc(2^0 + 2^{2013} + 2^{2014}) = 7$ 1p

$uc(n) = 7$ 1p

Problema 2. $\overline{abcdef} \cdot 10^6 + \overline{fedcba} = \overline{abcdeffedcba}$ 1p

$\overline{abcdeffedcba} = a \cdot \underbrace{100...01}_{12 cifre} + b \cdot \underbrace{100...01}_{10 cifre} + ... + e \cdot \underbrace{1001}_{4 cifre} + f \cdot 11$ 2p

$\underbrace{100...01}_{12 cifre} : 11 = \underbrace{9090...91}_{10 cifre}, \underbrace{100...01}_{10 cifre} : 11 = \underbrace{9090...91}_{8 cifre}, ..., \underbrace{1001}_{4 cifre} : 11 = \underbrace{91}_{2 cifre}, f \cdot 11 : 11 = f$ 3p

$11 / (a \cdot \underbrace{100...01}_{12 cifre} + b \cdot \underbrace{100...01}_{10 cifre} + ... + e \cdot \underbrace{1001}_{4 cifre} + f \cdot 11)$ 1p

Problema 3. $104^2 = 10816; 105^2 = 11025; 141^2 = 19881; 142^2 = 20164$ 2p

$1\underline{10}11, 1\underline{99}11$ nu sunt pătrate perfecte....................1p

Baza puterii pătratului perfect poate fi unul din numerele: $109, 111, 119, 121, 129, 131, 139, 141$ 2p

Prin încercări, singura posibilitate este $109^2 = 11\underline{88}1$ 2p

Problema 4. Avem următoarele cazuri de distribuire a bilelor în cele patru cutii:

a) $a, a-4, a-1, a-3 \Rightarrow 4a - 8 = 144 \Rightarrow a - 4 = 34$ 2p

b) $a, a-4, a-7, a-5 \Rightarrow 4a - 16 = 144 \Rightarrow a - 4 = 36$ 2p

c) $a, a-4, a-7, a-9 \Rightarrow 4a - 20 = 144 \Rightarrow a - 4 = 37$ 2p

În a doua cutie pot fi distribuite maximum 37 bile....................1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro