INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem clasa a VII-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

a) Calculaţi: $E=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3a-2}-\frac{1}{3a+1}\right)$, $a\in N^*$.

b) Dacă $S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $n\in N^*$, arătaţi că $S<\frac{1}{3}$.

(selectată de prof. Chiş Maria – Şcoala Gimnazială "Corneliu Coposu" Zalău)

Soluţie

a) $E=\frac{1}{(3a-2)(3a+1)}$ ……..3p

b) Folosind a) obţinem:

$S=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+...+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]=\frac{n}{3n+1}<$…………..3p

$<\frac{n}{3n}=\frac{1}{3}$ ……………………………………………………………1p

PROBLEMA 2

a) Arătaţi că numărul $x=\sqrt{\frac{5}{0,0(2)}}+\sqrt{\frac{55}{0,0(02)}}+\sqrt{\frac{555}{0,0(002)}}$ este număr natural şi determinaţi valoarea acestuia.

(***)

b) Demonstraţi că numărul $m=\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2012+2013}$ este un număr iraţional.

(Gazeta Matematică, 10/2013)

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

Soluţie

a) Transformările: $0,0(2)=\frac{1}{45}, 0,0(02)=\frac{1}{495}, 0,0(002)=\frac{1}{4995}$ .... *1 punct*

Înlocuind sub radical se obţine: $x=\sqrt{5\cdot 45}+\sqrt{55\cdot 495}+\sqrt{555\cdot 4995}$ .... *1 punct*

Efectuând calculele sau descompunând factorii de sub radicali se obţine:
$x=\sqrt{3^2\cdot 5^2}+\sqrt{3^2\cdot 5^2\cdot 11^2}+\sqrt{3^2\cdot 5^2\cdot 37^2} \Leftrightarrow x=15+165+1665$ ....*2 puncte*
$\Leftrightarrow x=1845$

b) Deoarece produsul $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2012$ se termină în 0 ....*1 punct*

suma $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2012+2013$ se termină cu 3 ....*1 punct*

Cum nici un pătrat perfect nu se termină cu 3, rezultă că numărul m este număr iraţional
....*1 punct*

PROBLEMA 3

Se consideră numerele raţionale nenule a,b,c,d. Arătaţi că $a\cdot b\cdot c\cdot d<0$, ştiind că $\frac{1}{a+b+c+d}=\frac{2}{b+c+d}=\frac{3}{c+d+a}=\frac{4}{d+a+b}$.

(Gazeta Matematică, 9/2014)

Soluţie

Prin inversare avem: $\frac{a+b+c+d}{1}=\frac{b+c+d}{2}=\frac{c+d+a}{3}=\frac{d+a+b}{4}=k$ ....*1 punct*

Rezultă $(1) a+b+c+d=k$, $(2) b+c+d=2k$, $(3) c+d+a=3k$ şi $(4) d+a+b=4k$ .....*2 puncte*

Scăzând relaţiile (1) şi (2) obţinem $a=-k$ ....*1 punct*

Scăzând relaţiile (1) şi (3) obţinem $b=-2k$ ....*1 punct*

Scăzând relaţiile (1) şi (4) obţinem $c=-3k$, iar prin înlocuirea în (1) obţinem $d=7k$ ..*1 punct*

Deci $abcd=-42k^4$ evident negativ...*1 punct*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

PROBLEMA 4

În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră punctul E. Arătaţi că, dacă triunghiul CED este echilateral, atunci triunghiul AEB este isoscel, cu măsura unghiului AEB de $150°$.

(selectată de prof. Gornoavă Valeriu – Liceul cu Program Sportiv "Avram Iancu" Zalău)

Soluţie

Triunghiul CED echilateral atunci $CE = DC = DE$ şi măsurile unghiurilor EDC, DEC şi ECD sunt de câte $60°$, iar $ABCD$ pătrat, atunci $CD = AD = BC$, iar măsurile unghiurilor ADC şi BCD sunt de câte $90°$ ……………………..…………………………………………………….. *1 punct*

Atunci măsurile unghiurilor ADE şi BCE sunt de câte $30°$……………………………..………*1 punct*

Triunghiurile DAE şi BCE sunt congruente ($L.U.L.$) rezultă că laturile AE şi BE sunt congruente, deci triunghiul AEB este isoscel cu baza AB ………………………………..…*3 puncte*

Deoarece $AD = DE$ triunghiul ADE este isoscel cu baza AE, rezultă că măsura unghiului DAE este de $75°$, iar măsura unghiului EAB este de $15°$ …………………………………….*1 punct*

Triunghiul AEB isoscel cu baza AB atunci măsura unghiului AEB este de $150°$ ………*1 punct*