Olimpiada de matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a VII-a

1.

(i) Să se arate că $\sqrt{n}+\sqrt{n+3}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

(ii) Să se compare numerele *3A* și *B*, unde $A=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{100}-\sqrt{97}}$ și

$B=\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{98}}$.

2.

(i) Dacă $x\in\mathbb{N}$ și *3* nu divide pe x, arătați că restul împărțirii lui x^2 la *3* este egal cu *1*.

(ii) Dacă numerele $a,b,c\in\mathbb{N}$ nu sunt divizibile cu *3*, demonstrați că numărul $u=\sqrt{a^{2014}+b^{2016}+c^{2018}+2}$ este irațional.

GM 2014

3. Arătați că într-un trapez isoscel înălțimea este egală cu linia mijlocie dacă și numai dacă diagonalele sunt perpendiculare.

4. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$ şi M mijlocul lui $[AC]$, iar $N\in AB, B\in(AN)$ astfel încât $BN=AM$. Dacă $\{O\}=MN\cap BC$, să se arate că:

(i) Punctul *O* este mijlocul lui $[MN]$.

(ii) $OC=3\cdot OB$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a VII-a

<table>
<tr><td>1.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>(i)</td><td>Se ridică la pătrat $\sqrt{n}+\sqrt{n+3}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
Finalizare</td><td>1p
2p</td></tr>
<tr><td></td><td>(ii)</td><td>Inegalitatea (i) devine $\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
Prin însumare obținem $3A<B$</td><td>2p
2p</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>(i)</td><td>Dacă $x\in\mathbb{N}$ și 3 nu divide pe x, atunci $x=3p\pm1, p\in\mathbb{N}$
$x^2=(3p\pm1)^2=\mathrm{M}_3+1$</td><td>1p
2p</td></tr>
<tr><td></td><td>(ii)</td><td>$u=\sqrt{a^{2014}+b^{2016}+c^{2018}+2}=\sqrt{M_3+2}$
Finalizare</td><td>2p
2p</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>(i)</td><td>Fie ABCD un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare și O punctul de intersecție al diagonalelor. Triunghiurile dreptunghice determinate de diagonale sunt isoscele. Înălțimea dusă prin intersecția diagonalelor formează segmente ce sunt mediane.
Finalizare</td><td>2p
1p</td></tr>
<tr><td></td><td>(ii)</td><td>Reciproc. Fie OP și OR proiecțiile punctului O pe AB, respectiv CD.
Din asemănarea tr. AOB și tr. DOC rezultă $\frac{PR}{OP}=\frac{AB+DC}{AB}$, dar $\frac{AB+DC}{2}=PR$
În tr. AOB isoscel, $OP=\frac{AB}{2}$
Finalizare</td><td>1p
1p
1p
1p</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>(i)</td><td>Fie P mijlocul lui BC. Deoarece MP este linie mijlocie în triunghiul CAB, deducem că
$MP=\frac{AB}{2}=\frac{AC}{2}=AM$ şi $MP\parallel BN$.
Cum $BN=AM$ rezultă că $MP=BN$.
Deducem MNBP paralelogram, deci O, care este intersecţia diagonalelor BP şi MN, este mijlocul lui $[MN]$.</td><td>1p
1p
2p</td></tr>
<tr><td></td><td>(ii)</td><td>Deoarece MBNP este paralelogram $OB=OP$ deci $OB=OP=\frac{BP}{2}=\frac{BC}{4}$. Cum
$OC=OP+PC=\frac{BC}{4}+\frac{BC}{2}=\frac{3BC}{4}$, se obţine tocmai condiţia cerută.</td><td>1p
2p</td></tr>
</table>

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro