OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a VII-a

Problema 1. Se consideră pătratul $ABCD$ în care se notează cu M mijlocul laturii $[AB]$. Fie E punctul de intersecţie al dreptelor BD şi CM. Arătaţi că $DM \perp AE$.

Graţiela Popa, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

E este centrul de greutate al triunghiului ABC .... (2p)
Notând $\{N\} = AE \cap BC$, rezultă că N este mijlocul lui $[BC]$ .... (2p)
$\Delta BAN \equiv \Delta ADM \Rightarrow \sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle ADM$ .... (2p)
Cum $m(\sphericalangle ADM) + m(\sphericalangle DAE) = 90°$, rezultă că $DM \perp AE$ .... (1p)

Problema 2. **a)** Arătaţi că oricare ar fi numerele reale a, b, c are loc relaţia $|a+b| + |a+c| \geq |b-c|$.
b) Demonstraţi că pentru orice număr real x are loc inegalitatea:

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + ... + |x+2014| \geq 1007^2.$$

Liliana Puţ, Gazeta Matematică nr. 11/2014

Soluţie şi barem de corectare

a) Se ştie că $|x+y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ .... (1p)
Atunci $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$, de unde, pentru $x = a+b$, $y = a+c$, se obţine relaţia $|a+b| + |a+c| \geq |b-c|$ din enunţ .... (2p)
b) Pentru orice $k \in \{1, 2, ..., 1007\}$, conform relaţiei de la **a)**, rezultă $|x+k| + |x+k+1007| \geq 1007$ .... (2p)
Adunând aceste relaţii pentru $k \in \{1, 2, ..., 1007\}$ se obţine inegalitatea din enunţ .... (2p)

Problema 3. Se consideră numărul natural $n = \overline{abcd}$ şi $x = \sqrt{\overline{ab,(cd)} + \overline{bc,(da)} + \overline{cd,(ab)} + \overline{da,(bc)}}$, unde a, b, c, d sunt cifre nenule.
a) Ştiind că x este raţional, determinaţi cea mai mare valoare posibilă pe care o poate lua n.
b) Arătaţi că dacă x este număr natural, atunci n are cel puţin două cifre egale.

Marius Perianu, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

a) $\overline{ab,(cd)} + \overline{bc,(da)} + \overline{cd,(ab)} + \overline{da,(bc)} = \dfrac{100(a+b+c+d)}{9}$ .... (3p)
Atunci $x = \dfrac{10}{3} \cdot \sqrt{a+b+c+d}$, deci x este raţional dacă şi numai dacă $a+b+c+d$ este pătrat perfect ... (1p)
Dintre cifrele a, b, c, d, cel mult una poate fi egală cu 9, deci $a+b+c+d \in \{4, 9, 16, 25\}$, iar valoarea maximă a lui n se obţine pentru $a+b+c+d = 25$ şi este 9871 .... (1p)
b) Dacă x este natural, atunci $a+b+c+d = 9$ .... (1p)
Presupunând că a, b, c, d sunt diferite, ar rezulta că $a+b+c+d \geq 1+2+3+4 = 10$, absurd .... (1p)

Problema 4. Fie triunghiul ABC şi punctele $D, E, F \in (BC)$ astfel încât [AD este bisectoarea unghiului BAC, [AE este bisectoarea unghiului BAD şi [AF este bisectoarea unghiului CAD. Arătaţi că:

$$AE \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}\right) = AF \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\right).$$

Ion Neaţă, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

(AE este bisectoare în $\Delta ABD \Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{EB+ED}{ED} = \frac{AB+AD}{AD} \Rightarrow ED = \frac{AD \cdot BD}{AB+AD}$ .... (2p)

Analog, (AF este bisectoare în ΔACD, de unde $FD = \frac{AD \cdot CD}{AC+AD}$ .... (1p)

Aplicând acum teorema bisectoarei în triunghiul AEF, rezultă $\frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DF} = \frac{AC+AD}{AB+AD} \cdot \frac{DB}{DC}$ .... (2p)

Cum $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, rezultă:

$\frac{AE}{AF} = \frac{AC+AD}{AB+AD} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}}$, de unde $AE \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}\right) = AF \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\right)$ .... (2p)