R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a VIII-a

PROBLEMA 1

Fie $a, b \in R$ *astfel încât* $a = b - 1$ *şi* $b \in [1;3]$. *Să se arate că:*

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2b + 1} + \sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13} = 2\sqrt{2}.$$

PROBLEMA 2

a) Pătratul ABCD şi dreptunghiul ABEF sunt situate în plane perpendiculare. Dacă AB=40 cm, BE=30 cm, aflaţi d(D,EF) şi d(E,AC).

b) Cubul OLEMPICS are lungimea muchiei OP=6 cm.

Calculaţi: ***i)*** *lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic format alăturând două astfel de cuburi;*

ii) *d(M, (PLC));*

iii) *m(< (OC, (OLE))).*

PROBLEMA 3

Fie E(x,y) =2013x-2014y-1

a) Dacă $x \in [-1;1]$ *şi* $y \in [-2;-1]$ *arătaţi că* $E(x; y) \geq 0$;

b) Determinaţi numărul divizorilor maximului lui E(x,y).

PROBLEMA 4

Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare şi G_1, G_2, G_3 *centrele de greutate ale* ΔBCD, ΔACD *respectiv* ΔABD.

a) Arătaţi că planul $(G_1G_2G_3)$ *este paralel cu planul (ABC);*

b) Demonstraţi că dreptele AG_1, BG_2 *şi* CG_3 *sunt concurente.*

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare şi notare

PROBLEMA 1

Fie $a,b \in R$ *astfel încât* $a=b-1$ *şi* $b \in [1;3]$. *Să se arate că:*

$$\sqrt{a^2+b^2-2b+1}+\sqrt{a^2+b^2-4a-6b+13}=2\sqrt{2}.$$

Soluţie:

Avem:

$\sqrt{a^2+b^2-2b+1}+\sqrt{a^2+b^2-4a-6b+13}=$ ....*2 puncte*

$\sqrt{a^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}=$

$\sqrt{a^2+a^2}+\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2a^2}+\sqrt{2(a-2)^2}=$ ……………………….*1 punct*

$|a|\sqrt{2}+|a-2|\sqrt{2}=$ ……………………………………………………………….*2 puncte*

$(|b-1|+|b-3|)\sqrt{2}=$ ……………………………………………………………….*1 punct*

$(b-1+3-b)\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$ …………………………………………………………….*1 punct*

PROBLEMA 2

a) Pătratul ABCD şi dreptunghiul ABEF sunt situate în plane perpendiculare. Dacă AB=40 cm, BE=30 cm, aflaţi d(D,EF) şi d(E,AC).

b) Cubul OLEMPICS are lungimea muchiei OP=6 cm.

Calculaţi: ***i)*** *lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic format alăturând două astfel de cuburi;*

ii) *d(M, (PLC));*

iii) *m(< (OC, (OLE))).*

(Gazeta Matematică nr.1/2011-Suplimentul cu exerciţii)

Soluţie:

a) Figura: …………………………………*0,50 puncte*

Din $\left.\begin{array}{l} DA \perp (ABE) \\ EF \subset (ABE) \\ AF \perp FE \end{array}\right\} \underset{T_3P}{\Longrightarrow} DF \perp FE \Rightarrow d(D,EF)=DF=50cm$ ………………*1,50 puncte*

Din

$$\left.\begin{array}{l} EB \perp (ABC) \\ AC \subset (ABC) \\ duc BO \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow EO \perp AC \Rightarrow \underset{T_3P}{d(E, AC)} = EO = 10\sqrt{17}cm$$ …………*1,50 puncte*

b) Figura: ……………………………………*0,50 puncte*

i) d = 6 $\sqrt{6}$ cm ………………………………………*1 punct*

ii) d(M, (PLC)) este înălţimea tetraedrului MPLC …….*0,50 puncte*,

d(M, (PLC)) = 4 $\sqrt{3}$ cm ………………………………*0,50 puncte*

iii) În ΔOEC dr, m(<E) = 90°, (0,50 p), sin(<(OC, (OLE)))= $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ……………..*1 punct*

PROBLEMA 3

Fie E(x,y) =2013x-2014y-1

a) Dacă $x \in [-1;1]$ şi $y \in [-2;-1]$ arătaţi că E(x; y)≥0;

b) Determinaţi numărul divizorilor maximului lui E(x,y).

<u>Soluţie:</u>

a)-1≤x≤1 => -2013≤2013x≤2013 ………...…*1punct*

-2≤y≤-1 => 2014≤-2014y≤4028 ………..….*1 punct*

Adunând aceste relaţii obţinem 1≤2014x-2015y≤6041 ……………............……*1 punct*

Iar scăzând din fiecare membru –1 şi obţinem : 0≤ E(x ;y) ≤ 6040..........………..*1 punct*

b) max. E(x; y) =6040 =$2^3 \cdot 5 \cdot 151$ ....*1 punct*

Demonstraţia că 151 este număr prim …...………*1 punct*

Numărul divizorilor este (3+1)·(1+1)·(1+1)=4·2·2=16 divizori …........……..*1 punct*

PROBLEMA 4

Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare şi G_1,G_2,G_3 centrele de greutate ale ΔBCD, ΔACD respectiv ΔABD.

a) Arătaţi că planul $(G_1G_2G_3)$ este paralel cu planul (ABC);

b) Demonstraţi că dreptele AG_1, BG_2 şi CG_3 sunt concurente.

<u>Soluţie:</u>

a) Fie (BM),(AM) si (BN) mediane in ΔBCD, ΔACD respectiv ΔABD iar G_1,G_2,G_3 centrele de greutate ale ΔBCD, ΔACD respectiv ΔABD. Atunci G_1,G_2,G_3 apartin segmentelor (BM),(AM) si (BN) ……………………*1 punct*

Cum $BG_1/BM=2/3$, $AG_2/AM=2/3 \Rightarrow BG_1/BM= AG_2/AM \Rightarrow$(r.t.Thales in ΔAMB) G_1G_2 $G_1G_2 \parallel AB$. Dar $AB\subset(ABC) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC)$ **(1)** ……………………..*1 punct*

$BG_1/BM= BG_3/BN(=2/3) \Rightarrow$(r.t.Thales in ΔBMN) $G_1G_3 \parallel MN$ dar (MN) linie mijlocie in $\Delta ACD \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow G_1G_3 \parallel AC$ dar $AC\subset(ABC) \Rightarrow G_1G_3 \parallel (ABC)$ …………*1 punct*

dar G_1G_3 , G_1G_2 sunt drepte concurente din planul(G_1 G_2 G_3) $\Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$ ….*1 punct*

b) In ΔAMB ,$AG_1\cap BG_2 =\{P\}$, $G_2P/PB=1/3$. Presupunem ca, $CG_3\cap BG_2 =\{P'\}$…… *1 punct*

In ΔCNB $G_2P'/P'B=1/3 \Rightarrow$ exista doua puncte in interiorul (BG_2) care il impart in raportul 1/3 absurd. ………………………*1 punct*

Deci presupunerea facuta este falsa $\Rightarrow AG_1$, BG_2 si CG_3 concurente in P astfel incat $G_2P/PB=1/3$…………………………*1 punct*