OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2014
Clasa a X-a

Subiecte:

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \ldots + \frac{1}{\log_x(2^{2013}) \cdot \log_x(2^{2014})}$

   a) Să se calculeze $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
   b) Să se arate că f nu este injectivă.
   c) Să se rezolve ecuația $f(x) = \frac{4026}{1007}$.

2. Să se rezolve ecuația $5^x = 3^{x+\{x\}}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a.

   Prof.Burtea Marius, Alexandria

3. Se consideră în mulţimea numerelor complexe ecuaţiile $x^{19} = -i$ şi $y^{53} = i$
   a) Calculaţi $(a \cdot b)^{2014}$ unde a este o soluție a uneia dintre ecuații iar b o soluție a celeilalte ecuații.
   b) Aflaţi soluțiile comune ale celor două ecuații.

   Prof. Voiculeț Septimius, Videle

4. Să se arate că $2^x + 3^{-x} + 4^{-x} + 6^x \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$.
Pentru ce valori ale lui x se realizează egalitatea?

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a X-a

1. a) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{(-1)(-2)}+\frac{1}{(-2)(-3)}+\ldots\ldots+\frac{1}{(-2013)(-2014)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\ldots+\frac{1}{2013\cdot2014}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=1-\frac{1}{2014}=\frac{2013}{2014}$ ……………2p

   b) $f(2)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot2014}=f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)=f\left(\frac{1}{2}\right)$, deci nu este injectivă ………………………………………………………………………………2p

   c) $f(x)=\frac{1}{1\cdot2(\log_x 2)^2}+\frac{2}{2\cdot3(\log_x 2)^2}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot2014(\log_x 2)^2}=$
   $=\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots++\frac{1}{2013\cdot2014}\right)\cdot\frac{1}{(\log_x 2)^2}=\frac{2013}{2014}\cdot(\log_2 x)^2$ ………………...2p

   Rezultă $\frac{2013}{2014}\cdot(\log_2 x)^2=\frac{4026}{1007}$,deci $(\log_2 x)^2=4,\ \log_2 x=\pm2,\ x\in\left\{\frac{1}{4},4\right\}$ ……………………………………………………………………………….1p

2. Avem că $\left(\frac{5}{3}\right)^x=3^{\{x\}}\in[1,3)$. Rezultă că $1\le\left(\frac{5}{3}\right)^x<3$ sau $0\le x<\log_{\frac{5}{3}}3<3$.

   Se obține că $[x]\in\{0,1,2\}$ ……………………………………………………..2p

   Pentru $[x]=0$ se obține ecuația $5^{\{x\}}=3^{\{x\}+\{x\}}$ care se scrie $\left(\frac{5}{9}\right)^{\{x\}}=1$ cu soluția $\{x\}=0$, deci $x=0$ ………………………………………………………..2p

   Pentru $[x]=1$ se obține ecuația $5^{1+\{x\}}=3^{1+\{x\}+\{x\}}$ care se scrie $\left(\frac{5}{9}\right)^{\{x\}}=\frac{3}{5}$ cu soluția $\{x\}=\log_{\frac{5}{9}}\left(\frac{3}{5}\right)\in[0,1)$, deci $x=1+\log_{\frac{5}{9}}\left(\frac{3}{5}\right)$ ……………………………..1p

   Pentru $[x]=2$ se obține ecuația $5^{2+\{x\}}=3^{2+\{x\}+\{x\}}$ care se scrie $\left(\frac{5}{9}\right)^{\{x\}}=\left(\frac{3}{5}\right)^2$ cu soluția $\{x\}=\log_{\frac{5}{9}}\left(\frac{3}{5}\right)^2>1$, deci nu există soluție…………………………..1p

   Mulțimea soluțiilor ecuației date este $S=\left\{0,1+\log_{\frac{5}{9}}\left(\frac{3}{5}\right)\right\}$ …………………1p

3. a) Putem considera a soluție a primei ecuații.
   $(a\cdot b)^{2014}=a^{2014}\cdot b^{2014}=\left(a^{19}\right)^{106}\cdot\left(b^{53}\right)^{38}=(-i)^{106}\cdot i^{38}=(-1)(-1)=1$
   ………………………………………………………………………………. 3p

   b) Dacă z este soluție comună, $z^{19}=-i, z^{53}=i$, $(z^{19})^3=(-i)^3=i$

deci $z^{57} = i$ și $z^{53} = i$,rezultă $z^4 = 1$, adică $z \in \{1, -1, i, -i\}$................2p

$z = 1, z = -1$ și $z = -i$ nu verifică ambele ecuații, iar i le verifică.
Deci $z = i$ este singura soluție comună...2p

4. Folosind inegalitatea $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ rezultă $(2^x + 6^x) + (3^{-x} + 4^{-x}) \geq 2\sqrt{2^x \cdot 6^x} + 2\sqrt{3^{-x} \cdot 4^{-x}} = 2\left(\sqrt{12^x} + \sqrt{12^{-x}}\right) = 2\left(12^{\frac{x}{2}} + 12^{\frac{-x}{2}}\right) \geq$

$\geq 2 \cdot 2\sqrt{12^{\frac{x}{2}} \cdot 12^{\frac{-x}{2}}} = 4$ 5p

Egalitatea se realizează pentru $2^x = 6^x, 3^{-x} = 4^{-x}, 12^x = 12^{-x}$, adică pentru $x = 0$ 2p