BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VIII – a

1. Să se demonstreze că dacă x – 7y + 3 = 0 şi $x \in$[-3;4] atunci
$E(x,y)=\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=5\sqrt{2}$.

Prof. Constantin Popovici, Cajvana

Soluție: x – 7y + 3=0 => 7y = 3+ x => $y=\frac{3+x}{7}$ şi $x \in$[-3;4] => $y \in [0;1]$

Înlocuim în relația E(x,y) pe x =7y – 3 şi obținem:

$$E(y)=\sqrt{(7y)^2+y^2}+\sqrt{(7y-7)^2+(y-1)^2}=\sqrt{50y^2}+\sqrt{7^2(y-1)^2+(y-1)^2}=$$
$$=\sqrt{50}|y|+\sqrt{50}|y-1|=5\sqrt{2}y+5\sqrt{2}(-y+1)=5\sqrt{2}y-5\sqrt{2}y+5\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

Barem:

Din x –7y+3=0 şi $x \in$[-3;4] => $y \in [0;1]$	2p
După înlocuire $E(y)=\sqrt{50\cdot y^2}+\sqrt{50\cdot(y-1)^2}$	1p
$E(y)=\sqrt{50}\cdot\|y\|+\sqrt{50}\cdot\|y-1\|$	1p
$E(y)=5\sqrt{2}y+5\sqrt{2}(-y+1)$	2p
$E(y)=5\sqrt{2}$	1p

2. a) Demonstraţi inegalitatea $\sqrt{x^2+xy+y^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$, pentru orice numere reale pozitive x, y.

b) Deduceţi că: $\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{yz}+\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{zx}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z.

Prof. Aurica Andronic, Pirteştii de Jos

Soluție: a) Se ridică la pătrat inegalitatea $\sqrt{x^2+xy+y^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)\Leftrightarrow x^2+xy+y^2\ge\frac{3}{4}(x+y)^2\Leftrightarrow$
$4(x^2+xy+y^2)\ge 3(x^2+2xy+y^2)\Leftrightarrow 4x^2+4xy+4y^2-3x^2-6xy-3y^2\ge 0\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0\Leftrightarrow$
$(x-y)^2\ge 0$, adevărat pentru orice numere reale x, y.

b) Din relaţia $\sqrt{x^2+xy+y^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$ obţinem $\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{xy}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x+y}{xy}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$ analog obţinem $\frac{\sqrt{y^2+yz+y^2}}{yz}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{y+z}{yz}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ şi $\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{xz}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{z+x}{xz}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$. Adunând cele trei inegalităţi obţinem $\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{yz}+\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{zx}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

Barem:

a) $\sqrt{x^2+xy+y^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)\Leftrightarrow x^2+xy+y^2\ge\frac{3}{4}(x+y)^2$	1p
$4(x^2+xy+y^2)\ge 3(x^2+2xy+y^2)\Leftrightarrow 4x^2+4xy+4y^2-3x^2-6xy-3y^2\ge 0$	1p
$x^2-2xy+y^2\ge 0\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0$	1p

b) $\sqrt{x^2+xy+y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y) \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x+y}{xy}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$....	1p
$\frac{\sqrt{y^2+yz+y^2}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{y+z}{yz}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$..	1p
$\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{xz} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{z+x}{xz}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$..	1p
$\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$............	1p

3. Pe planul dreptunghiului ABCD se ridică perpendiculara PD, P $\notin$(ABC).

Dacă AM $\perp$PB, CN$\perp$PB (M, N $\in$PB), MN = 3 cm, AB = 8 cm, BC = 4 cm, calculaţi:

a) lungimea segmentului (PB);

b) tangenta măsurii unghiului planelor (ABC) şi (APC).

Prof. Petru Nicuţă, Rădăuţi

<u>Soluţie:</u>

a) - Dacă PD $\perp$(ABC) şi DC $\perp$BC $\Rightarrow$ (T.3$\perp$) PC $\perp$BC; analog PA$\perp$AB.

Aplicând teorema catetei: - în ΔPBC obţinem: $BC^2 = BN \cdot PB$

- în ΔPAB obţinem: $AB^2 = BM \cdot PB$

Din diferenţa relaţiilor avem: $AB^2 - BC^2 = PB\cdot(BM - BN) \Rightarrow 48 = 3 \cdot PB$, de unde PB = 16 cm.

b) - Dacă DE $\perp$AC $\Rightarrow$(T.3$\perp$) PE $\perp$AC $\Rightarrow$ $\sphericalangle$ [(ABC), (APC)] = $\sphericalangle$ (DE, PE) = $\sphericalangle$ DEP

- în ΔDEP dreptunghic în D: tg$\sphericalangle$ DEP = $\frac{PD}{DE}$
- Aplicând teorema lui Pitagora: - în ΔABC: AC = $4\sqrt{5}$ cm;

  - în ΔPDB: PD = $4\sqrt{11}$ cm
- În ΔDAC: DE $\perp$AC $\Rightarrow$ DE = $\frac{DA \cdot DC}{AC} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ cm, deci tg $\sphericalangle$ DEP = $\frac{\sqrt{55}}{2}$

<u>Barem:</u>

a) PC $\perp$BC şi PA $\perp$AB	1p
$BC^2 = BN \cdot PB$ şi $AB^2 = BM \cdot PB$	1p
PB = 16 cm	1p
b) $\sphericalangle$ [(ABC), (APC)] = $\sphericalangle$ (DE, PE) = $\sphericalangle$ DEP	1p
ΔABC: AC = $4\sqrt{5}$ cm; ΔPDB: PD = $4\sqrt{11}$ cm	1p

DE = $\frac{DA \cdot DC}{AC} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ cm	1p
tg $\measuredangle$ DEP = $\frac{\sqrt{55}}{2}$	1p

4. Fie triunghiul ABC cu laturile de lungimi x,y,z, ce verifică simultan relaţiile: $x^2+y^2 \le \frac{2}{x}, y^2+z^2 \le \frac{2}{y}, z^2+x^2 \le \frac{2}{z}, xyz=1$. Pe planul lui se ridică perpendicularele AM = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ şi BN = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Arătaţi că ΔABC este echilateral.

b) Dacă x = 1 calculaţi: i) măsura unghiului dintre MB şi NC;

ii) valoarea tangentei unghiului dintre CN şi planul (ABM).

Prof. Dorel Ispăşoiu, Gura Humorului

<u>Solutie şi barem:</u>

a) Însumând relaţiile obţinem: $2x^2+2y^2+2z^2 \le \frac{2xy+2yz+2xz}{xyz}$ şi cum

xyz=1 $\Rightarrow \Rightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \le 0 \Rightarrow$ x = y = z = 1 $\Rightarrow$ ΔABC = echilateral cu AB = 1 u.m.

b) i) Dacă punctul a) nu a fost rezolvat, din x=1 şi cu ajutorul relaţiilor din enunţ se poate arăta că y=1 şi z=1.

Prelungim AM cu MP = BN $\Rightarrow$ AP= $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ şi MBNP = paralelogram $\Rightarrow$ MB ‖ PN.

PN şi AB coplanare, PN $\cap$ AB= $\{D\}$ şi m($\measuredangle$ MB, NC)= m($\measuredangle$ PD, NC).

Din asemănarea triunghiurilor DBN şi DAP se obţine DB = $\frac{3}{2}$

Dacă E = mijlocul segmentului AB, avem CE $\perp$ AB şi din ΔCED dreptunghic $\Rightarrow$ CD = $\frac{\sqrt{19}}{2}$ (1)

Din ΔCBN dreptunghic $\Rightarrow$ CN = $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (2)

Din ΔDBN dreptunghic $\Rightarrow$ DN = $\sqrt{3}$ (3)

Din (1),(2),(3) $\Rightarrow$ ΔCND dreptunghic cu m($\measuredangle$ PD, NC) = 90^0

ii) CE $\perp$ (ABM) şi N $\in$ (ABM) $\Rightarrow$ $pr_{(ABM)}CN$ =EN $\Rightarrow$ m[$\measuredangle$ CN,(ABM)] = m($\measuredangle$ CNE)

CE= $\frac{\sqrt{3}}{2}$, EN =1 şi din ΔCEN dreptunghic: tg[$\measuredangle$ CN,(ABM)]= $\frac{CE}{EN}$ $\Rightarrow$ tg[$\measuredangle$ CN, (ABM)] = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Barem:</u>

a) $2x^2+2y^2+2z^2 \le \frac{2xy+2yz+2xz}{xyz}$	1p
$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \le 0 \Rightarrow$ x = y = z = 1 $\Rightarrow$ ΔABC = echilateral	1p

b) i)Prelungim AM cu MP=BN $\Rightarrow$ AP=$\frac{5\sqrt{3}}{6}$ şi MBNP=paralelogram $\Rightarrow$ MB ∥ PN. PN şi AB coplanare, PN $\cap$ AB=$\{D\}$ şi m($\sphericalangle$ MB, NC)= m($\sphericalangle$ PD, NC)	1p
ΔDBN ~ΔDAP $\Rightarrow$ DB = $\frac{3}{2}$; CD = $\frac{\sqrt{19}}{2}$	1p
CN = $\frac{\sqrt{7}}{2}$; DN = $\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ m($\sphericalangle$ PD, NC) = 90^0	1p
ii) CE $\perp$ (ABM) şi N $\in$ (ABM) $\Rightarrow$ $pr_{(ABM)}CN$ =EN $\Rightarrow$ m[$\sphericalangle$ CN,(ABM)] = m($\sphericalangle$ CNE)	1p
CE=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, EN =1; ΔCEN dreptunghic $\Rightarrow$ tg[$\sphericalangle$ CN,(ABM)]=$\frac{CE}{EN}$ $\Rightarrow$ tg[$\sphericalangle$ CN,(ABM)] = $\frac{\sqrt{3}}{2}$	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

16 februarie 2013

CLASA a VIII – a

1. Să se demonstreze că dacă x –7y + 3 = 0 şi $x \in [-3;4]$ atunci:
$E(x,y)=\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=5\sqrt{2}$.

2. a) Demonstraţi inegalitatea $\sqrt{x^2+xy+y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$, pentru orice numere reale pozitive x, y.

b) Deduceţi că: $\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{yz}+\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{zx} \geq \sqrt{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z.

3. Pe planul dreptunghiului ABCD se ridică perpendiculara PD, P $\notin$(ABC).

Dacă AM $\perp$PB, CN $\perp$PB (M, N $\in$PB), MN = 3 cm, AB = 8 cm, BC = 4 cm, calculaţi:

a) lungimea segmentului (PB);

b) tangenta măsurii unghiului planelor (ABC) şi (APC).

4. Fie triunghiul ABC cu laturile de lungimi x, y, z, ce verifică simultan relaţiile:
$x^2+y^2 \leq \frac{2}{x}, y^2+z^2 \leq \frac{2}{y}, z^2+x^2 \leq \frac{2}{z}, xyz=1$. Pe planul lui se ridică perpendicularele AM = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ şi BN = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Arătaţi că ΔABC este echilateral.

b) Dacă x = 1 calculaţi: i) măsura unghiului dintre MB şi NC;

ii) valoarea tangentei unghiului dintre CN şi planul (ABM).

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.