Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Barajul 3, 13 iunie 2021

Subiecte – seniori

Problema 4.

În triunghiul isoscel fix ABC, punctul M este mijlocul bazei BC. Punctul P este variabil în interiorul triunghiului, astfel încât $\angle CBP = \angle PCA$. Arătaţi că suma măsurilor unghiurilor $\angle BPM$ şi $\angle APC$ este constantă.

Problema 5.

Fie $N \geq 4$ un număr natural fixat.

Doi jucători, A şi B, formează o mulţime ordonată $x_1, x_2, x_3, \ldots$, adaugând alternativ elemente: A alege x_1 egal cu 1 sau cu -1, apoi B îl adaugă pe x_2 egal cu 2 sau cu -2, apoi A îl adaugă pe x_3 egal cu 3 sau cu -3, ş.a.m.d.; la pasul k, elementul adăgat este k sau $-k$, pentru orice $k \geq 1$. Câştigător este cel care reuşeşte primul să facă să apară o secvenţă de elemente consecutive având suma divizibilă cu N (secvenţa poate avea şi un singur termen).

Pentru fiecare N, stabiliţi care dintre jucători are o strategie de câştig.

Problema 6.

Fie α un număr din intervalul $(0,1)$. Arătaţi că există un şir de numere $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$, cu valori 0 sau 1, astfel încât şirul $(s_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$s_n = \frac{\varepsilon_1}{n(n+1)} + \frac{\varepsilon_2}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{(2n-1)2n},$$

să verifice inegalitatea

$$0 \leq \alpha - 2ns_n \leq \frac{2}{n+1},$$

pentru orice $n \geq 2$.

Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă valorează 7 puncte.