Barem de notare – clasa a VI-a

Problema 1. Fie a, b două numere naturale nenule astfel încât 7 divide 2a+3b. Arătați că 7 divide $4a^2+5b^2$.

Gazeta matematică

Soluţie:

$7/2a+3b \Rightarrow 2a+3b=7k,\ k\in N^*$ **2p**

$2a=7k-3b$ **1p**

$4a^2=(2a)^2=(7k-3b)^2=M_7+9b^2$ **2p**

$4a^2+5b^2= M_7+9b^2+5b^2=M_7+14b^2=M_7 \Rightarrow 7/4a^2+5b^2$. **2p**

Problema 2. a) Arătați că: $\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}$, $n,k\in N^*$.

b) Comparați numerele:

$a=\frac{4}{1\cdot5}+\frac{4}{5\cdot9}+\frac{4}{9\cdot13}+\cdots+\frac{4}{2013\cdot2017}$

$b=\frac{5}{1\cdot6}+\frac{5}{6\cdot11}+\frac{5}{11\cdot16}+\cdots+\frac{5}{2011\cdot2016}$

Soluţie:a) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{n+k-n}{n(n+k)}=\frac{k}{n(n+k)}$ **2p**

b) $a=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2017}$ **1p**

$a=1-\frac{1}{2017}$ **1p**

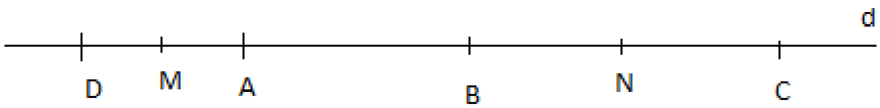
$b=\frac{1}{1}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2016}$ **1p**

$b=1-\frac{1}{2016}$ **1p**

Cum $\frac{1}{2017}<\frac{1}{2016}\Rightarrow a>b$. **1p**

Problema 3. Punctele A, B, C, D aparțin dreptei d, astfel încât 3AB=2BC, AB+BC=15 cm, iar [BC]≡[BD]. Calculați distanța dintre mijlocul segmentului [AD] și mijlocul segmentului [BC].

Soluţie: Cazul I. Ordinea punctelor este D-A-B-C.



3AB=2BC ⇒ AB=2k, BC=3k, k∈N^*

Cum AB+BC=15 cm ⇒ k=3, deci AB=6 cm şi BC=9 cm **0,5p**

[BC]≡[BD] ⇒ BC=BD=9 cm

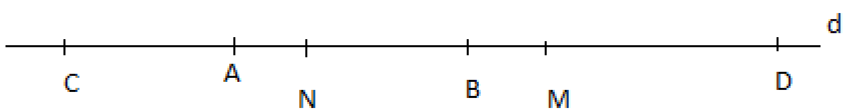
AD=BD-AB= 9 cm - 6 cm=3 cm **1p**

M mijlocul [AD] ⇒ $AM = MD = \frac{AD}{2} = 1{,}5\ cm$ **1p**

N mijlocul [BC] ⇒ $BN = NC = \frac{BC}{2} = 4{,}5\ cm$ **1p**

MN=MA+AB+BN=12 cm. **0,5p**

Cazul II. Ordinea punctelor este C-A-B-D



AD = AB+BD = 15 cm **0,5p**

M mijlocul [AD] ⇒ $AM = MD = \frac{AD}{2} = 7{,}5\ cm$ **0,5p**

N mijlocul [BC] ⇒ $BN = NC = \frac{BC}{2} = 4{,}5\ cm$ **0,5p**

AN = NC-AC = 1,5 cm **0,5p**

MN= AM–AN = 6 cm. **1p**

Problema 4. În jurul punctului O se construiesc n unghiuri, astfel încât $m(\sphericalangle A_0OA_1)=1^o$, $m(\sphericalangle A_1OA_2)=2^o$, $m(\sphericalangle A_2OA_3)=3^o$, … , $m(\sphericalangle A_{n-1}OA_n)=n^o$.

a) Care este valoarea cea mai mare posibilă a lui n?

b) Pentru n maxim posibil, demonstrați că $\sphericalangle A_5OA_{14}$ este unghi drept.

c) Calculați, pentru același n, măsura unghiului format de bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_2OA_3$ și bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_{13}OA_{14}$.

Soluţie:

a) $1^o+2^o+3^o+\ldots+n^o<360^o \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} < 360° \Rightarrow n=26^o$ **2p**

b) $n=26^o \Rightarrow m(\sphericalangle A_5OA_{14})= m(\sphericalangle A_5OA_6)+ m(\sphericalangle A_6OA_7)+\ldots+ m(\sphericalangle A_{13}OA_{14})=6^o+7^o+\ldots+14^o=90^o$

$\Rightarrow\sphericalangle A_5OA_{14}$ este unghi drept. **2p**

c) [OM bisectoarea $\sphericalangle A_2OA_3\Rightarrow m(\sphericalangle A_2OM)= m(\sphericalangle MOA_3)=1^o30'$ **1p**

[ON bisectoarea $\sphericalangle A_{13}OA_{14}\Rightarrow m(\sphericalangle A_{13}ON)= m(\sphericalangle NOA_{14})=7^o$ **1p**

$m(\sphericalangle MON)= m(\sphericalangle MOA_3)+ m(\sphericalangle A_3OA_4)+\ldots+ m(\sphericalangle A_{12}OA_{13})+ m(\sphericalangle A_{13}ON)$

$= 1^o30'+4^o+\ldots+13^o+7^o=93^o30'$. **1p**