

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

CLASA A X-A

Programa TC+CD (4 ore)

- 1.) a.) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația exponențială $2^{(x-1)(x-2)} + 2^{3x-x^2} = 5$.
- b.) În triunghiul ABC dreptunghic în A lungimile catetelor b și c satisfac egalitatea $2 \lg \frac{b+c}{\sqrt{6}} = \lg b + \lg c$. Calculați măsura unghiului C .
- 2.) Să se determine funcțiile surjective $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$; $a, b \in \mathbb{R}$.
- 3.) a.) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^8 - 77z^4 - 324 = 0$.
- b.) Reprezentați grafic în planul complex punctele corespunzătoare soluțiilor ecuației.
- c.) Uniți cu segmente în jurul originii punctele corespunzătoare soluțiilor ecuației și calculați perimetrul și aria „stelutei” obținute.
- 4.) Se dau mulțimile $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - \sqrt{3}| \leq 2\}$ și $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \sqrt{2}\}$. Fie M_A respectiv M_B mulțimea punctelor din planul complex ale căror afixuri sunt elementele mulțimilor A respectiv B . Calculați aria suprafeței plane $S = M_A \cap M_B$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Țimp de lucru 3 ore

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

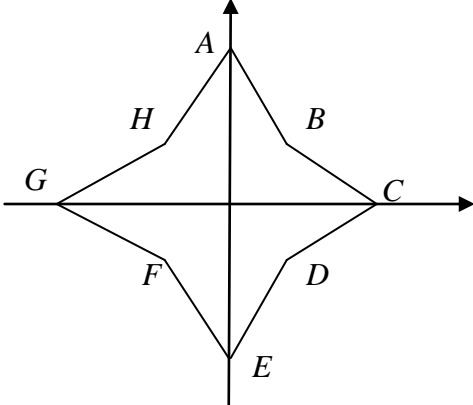
CLASA A X-A

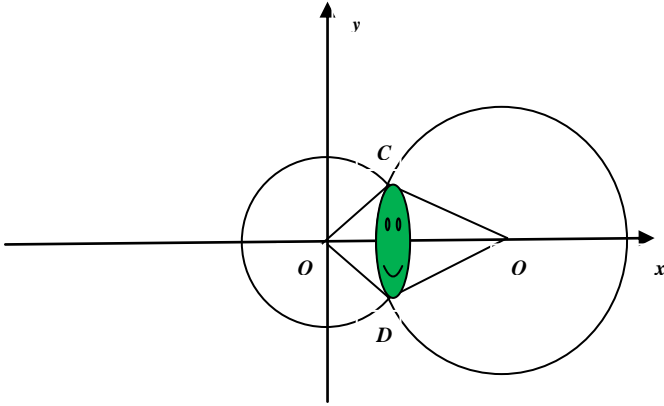
Programa TC+CD (4 ore/săpt)

1.)	Din oficiu	1p
a.)	$2^{(x-1)(x-2)} + 2^{3x-x^2} = 5 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2} + \frac{4}{2^{x^2-3x+2}} = 5$	1p
	Cu substituția $t = 2^{x^2-3x+2}$ obținem ecuația $t^2 - 5t + 4 = 0$ cu rădăcinile 1 și 4.	1p
	Ecuția $2^{x^2-3x+2} = 1$ are soluțiile 1 și 2. Ecuția $2^{x^2-3x+2} = 4$ are soluțiile 0 și 3. Mulțimea soluțiilor $S = \{0,1,2,3\}$.	2p
b.)	$2 \lg \frac{b+c}{\sqrt{6}} = \lg b + \lg c \Leftrightarrow \lg \left(\frac{b+c}{\sqrt{6}} \right)^2 = \lg bc$	1p
	$\Leftrightarrow \frac{b^2 + 2bc + c^2}{6} = bc \Leftrightarrow \frac{2bc}{a^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$	2p
	$\Leftrightarrow 2 \sin C \cos C = \frac{1}{2}$	1p
	$\Leftrightarrow \sin 2C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2C = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{12}$	1p

2.)	Din oficiu	1p
	f este surjectivă dacă $\text{Im} f = [-1,1]$	1p
	$\text{Im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y\}$	1p
	Rezultă $\text{Im} f = \left[\frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \right]$.	4p
	Din sistemul $\frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = -1$ și $\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = 1$ se obțin soluțiile $a = 2, b = 0$ respectiv $a = -2, b = 0$	2p
	Funcțiile căutate sunt: $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ și $f(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1}$.	1p

3.)	Din oficiu	1p
a.)	Cu substituția $z^4 = t$ obținem o ecuație de gradul doi cu rădăcinile 81 și -4.	1p
	Rezolvând ecuațiile binome $z^4 = 81$ și $z^4 = -4$ obținem mulțimea soluțiilor $S = \{3, 3i, -3, -3i, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$.	3p

b.)		2p
c.)	Perimetrul “stelutei” $ABCDEFGH$ este alcătuit din 8 segmente congruente de lungime $\sqrt{5}$, deci perimetrul este $P = 8\sqrt{5}$.	1p
	Aria poate fi calculată ca suma ariei pătratului $BDFH$ și ariilor a patru triunghiuri echilaterale congruente $A = 2^2 + 4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 12$.	2p

4.	Din oficiu	1p
		2p
	Suprafața S este „smile”-ul hașurat delimitat de câte un arc ale cercurilor $C(O, \sqrt{2})$ și $C(Q, 2)$.	1p
	$A_S = A_{\text{sector}COD} + A_{\text{sector}CQD} - A_{\Delta COD} - A_{\Delta CQD}$	1p
	$OC = \sqrt{2}$, $CQ = 2$, $OQ = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow m(\angle COQ) = 45^\circ$, $m(\angle CQO) = 30^\circ$ și $z_C = 1 + i$	2p
	$A_{\text{sector}COD} = \frac{1}{4} \pi \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$, $A_{\text{sector}CQD} = \frac{1}{6} \pi \cdot 2^2 = \frac{2\pi}{3}$	1p
	$A_{\Delta COD} + A_{\Delta CQD} = 2 \cdot \frac{OQ \cdot CD}{2} = 1 + \sqrt{3}$	1p
	$A_S = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} - 1 - \sqrt{3} = \frac{7\pi}{6} - 1 - \sqrt{3}$	1p