OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a X-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale *x* pentru care $x^{\sqrt{x}} < \left(\sqrt{x}\right)^x$.

Aurel Chiriţă, Slatina

Inecuaţia se scrie $x^{\sqrt{x}} < x^{\frac{x}{2}}$ .... (2p)

Pentru $x \in (0,1)$ rezultă $\sqrt{x} > \frac{x}{2}$, de unde $x \in (0,4) \cap (0,1) = (0,1)$ .... (2p)

Pentru $x \in (1,\infty)$ rezultă $\sqrt{x} < \frac{x}{2}$, de unde $x \in (4,\infty) \cap (1,\infty) = (4,\infty)$ .... (2p)

În concluzie, $x \in (0,1) \cup (4,\infty)$ .... (1p)

Problema 2. Demonstraţi că pentru orice număr natural $n \geq 2$ are loc inegalitatea:

$$\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg(2n) < \lg^n(n+1).$$

Eduard Buzdugan, Slatina

Inegalitatea se scrie echivalent $\sqrt[n]{\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg(2n)} < \lg(n+1)$ .... (1p)

Aplicând inegalitatea mediilor rezultă $\sqrt[n]{\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg(2n)} < \frac{\lg 2 + \lg 4 + \ldots + \lg(2n)}{n} = \frac{\lg(2^n \cdot n!)}{n}$ .... (2p)

Este suficient să arătăm că $\frac{\lg(2^n \cdot n!)}{n} < \lg(n+1)$, care se scrie echivalent

$2^n \cdot n! < (n+1)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$ .... (2p)

Ultima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor aplicată numerelor 1, 2, …, n .... (2p)

Problema 3. Se consideră numerele complexe, nenule şi distincte z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Ştiind că numerele $w_1 = z_2 + z_3 + \frac{z_2 z_3}{z_1}$, $w_2 = z_3 + z_1 + \frac{z_3 z_1}{z_2}$ şi $w_3 = z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{z_3}$ sunt reale, arătaţi că $w_1 = w_2 = w_3 = 0$.

Marius Perianu, Slatina

Notăm $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$, $s = z_1 + z_2 + z_3$, $m = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$, $p = z_1 z_2 z_3$.

Avem $w_k = \frac{m}{z_k}$ .... (1p)

Cum $w_k \in \mathbb{R}$, rezultă $w_k = \overline{w}_k$ .... (1p)

Deoarece $\overline{z_k}=\dfrac{r^2}{z_k}$ şi $\overline{m}=\dfrac{sr^4}{p}$, din $\dfrac{m}{z_k}=\dfrac{\overline{m}}{\overline{z_k}}$ rezultă $pm=sr^2z_k^2$, $k=1,2,3$ .... (2p)

Presupunând $s\neq 0$, rezultă $z_1^2=z_2^2=z_3^2=\dfrac{pm}{sr^2}$, deci cel puţin două dintre numerele z_1, z_2, z_3 sunt egale, contradicţie cu ipoteza .... (2p)

Ca urmare, $s=0$, de unde $m=0$ şi deci $w_1=w_2=w_3=0$ .... (1p)

Problema 4. Rezolvaţi ecuaţia:

$$(3^x+2)^{\log_5 3}+2=(5^x-2)^{\log_3 5}.$$

Marius Perianu, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2014

Ecuaţia se rescrie $(3^x+2)^{\log_5 3}+2=5^{\log_3(5^x-2)}$ şi, notând $y=\log_5(3^x+2)$, rezultă $3^y+2=5^{\log_3(5^x-2)}$ sau, echivalent $\log_3(5^x-2)=\log_5(3^y+2)$ .... (2p)

Notând $z=\log_5(3^y+2)$, rezultă $\log_3(5^x-2)=z$, de unde $x=\log_5(3^z+2)$ .... (1p)

Considerând funcţia crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\log_5(3^t+2)$, rezultă $y=f(x)$, $z=f(y)$, $x=f(z)$ ..... (1p)

Presupunând, de exemplu, $x\le y$, atunci $x\le y\Rightarrow f(x)\le f(y)\Leftrightarrow y\le z\Rightarrow f(y)\le f(z)\Leftrightarrow z\le x$, deci $x\le y\le z\le x$, de unde $x=y=z$ .... (2p)

Ca urmare, $x=\log_5(3^x+2)\Leftrightarrow 3^x+2=5^x$, ecuaţie cu soluţia unică $x=1$. Aşadar, $x=y=z=1$ .... (1p)