OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a IX-a
27.02.2015

Subiectul I.(20 puncte)

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive cu $a_1 + a_2 + \dots a_n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3}, n \in N^*$. Să se arate că

$\sqrt{a_1+2} + \sqrt{a_2+6} + \dots \sqrt{a_n + n\cdot(n+1)} < n\cdot(n+1)$.

prof. Camelia Magdaş, Colegiul Naţional Andrei Mureşanu Dej

Subiectul II.(30 puncte)

Se consideră triunghiul ABC. Paralelele duse prin vârfurile triunghiului la laturile opuse se intersectează două câte două în punctele M,N,P. Dacă G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor BCP, AMC respectiv ANB, să se arate că se poate construi un triunghi cu vectorii $\overrightarrow{AG_1}, \overrightarrow{BG_2}$ şi $\overrightarrow{CG_3}$.

prof. Camelia Magdaş, Colegiul Naţional Andrei Mureşanu Dej

Subiectul III.(25 puncte)

Într-un triunghi oarecare ABC, punctele D, E, F desemnează picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor A, B, C . Demonstraţi că : $a(b+c)\cdot\overrightarrow{AD} + b(a+c)\cdot\overrightarrow{BE} + c(a+b)\cdot\overrightarrow{CF} = \vec{0}$

prof. Vlad Ciobotariu - Boer, Liceul Teoretic „Avram Iancu” Cluj-Napoca

Subiectul IV.(15 puncte)

Fie $a_k = \sqrt{(k^2-k-2)(k^2+7k+10)+36}$, $k \in \mathbb{N}^*$ Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care:

$[\sqrt{a_1}] + [\sqrt{a_2}] + [\sqrt{a_3}] + \cdots + [\sqrt{a_n}] = 490$,unde $[a]$ reprezintă partea intreagă a numărului real a.

prof. Violin Gorcea, Liceul Teoretic „Avram Iancu” Cluj-Napoca

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. ***SUCCES!***
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

P-ţa Ştefan cel Mare nr. 4, Cluj - Napoca
Tel: +40 (0) 264 590 778, Fax: +40 (0) 264 592 832
www.isjcj.ro ,cluj@isjcj.ro

Barem clasa a IX-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz, avem

$$\left(\sqrt{a_1+2}\cdot 1+\sqrt{a_2+6}\cdot 1+\ldots\sqrt{a_n+n\cdot(n+1)}\cdot 1\right)^2<(1+1+\ldots+1)\cdot\left(a_1+2+a_2+6+\ldots a_n+n\cdot(n+1)\right)$$

(10 p)

$$<n\cdot\left(a_1+a_2+\ldots a_n+1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)\right) \qquad (1)$$

Se demonstrează prin inducție matematicăcă $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$. **(5 p)**

Inlocuind în relatia (1) se obține inegalitatea cerută. **(5 p)**

Subiectul II. (30 puncte)

Se arată că A,B,C mijloacele segmentelor NM , NP respective MP , deci

$\overrightarrow{r_A}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_M}+\overrightarrow{r_N}\right)$, $\overrightarrow{r_B}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_P}+\overrightarrow{r_N}\right)$ și $\overrightarrow{r_C}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_M}+\overrightarrow{r_P}\right)$ **(10 p)**

G_1 centrul de greutate al triunghiului BCP $\Rightarrow \overrightarrow{r_{G_1}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_P}\right)$

G_2 centrul de greutate al triunghiului ACM$\Rightarrow \overrightarrow{r_{G_2}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_M}\right)$

G_3 centrul de greutate al triunghiului ABN $\Rightarrow \overrightarrow{r_{G_3}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_N}\right)$

Se observă că $\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}=\overrightarrow{r_M}+\overrightarrow{r_N}+\overrightarrow{r_P}=\overrightarrow{r_{G_1}}+\overrightarrow{r_{G_2}}+\overrightarrow{r_{G_3}}$ **(10 p)**

Din $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{r_{G_1}}-\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{BG_2}=\overrightarrow{r_{G_2}}-\overrightarrow{r_B}$ și $\overrightarrow{CG_3}=\overrightarrow{r_{G_3}}-\overrightarrow{r_C}$ rezultă că $\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{BG_2}+\overrightarrow{CG_3}=\overrightarrow{r_{G_1}}+\overrightarrow{r_{G_2}}+\overrightarrow{r_{G_3}}-\left(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)=\vec{0}$,

deci cu vectorii $\overrightarrow{AG_1},\overrightarrow{BG_2}$ și $\overrightarrow{CG_3}$ se poate construi un triunghi. **(10 p)**

Subiectul III. (25 puncte)

a) Teorema bisectoarei ne permite să scriem :

$(b+c)\cdot\overrightarrow{AD}=b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC}, \qquad (1)$

$(a+c)\cdot\overrightarrow{BE}=a\cdot\overrightarrow{BA}+c\cdot\overrightarrow{BC}, \qquad (2)$

$(a+b)\cdot\overrightarrow{CF}=a\cdot\overrightarrow{CA}+b\cdot\overrightarrow{CB}. \qquad (3)$

(20 p)

Înmulţind relaţia (1) cu a, relaţia (2) cu b şi relaţia (3) cu c şi apoi însumând egalităţile obţinute , găsim :

$$a(b+c)\cdot\overrightarrow{AD}+b(a+c)\cdot\overrightarrow{BE}+c(a+b)\cdot\overrightarrow{CF}=\vec{0}.$$

(5 p)

Subiectul IV. (15 puncte)

$a_k=\sqrt{(k^2-k-2)(k^2+7k+10)+36}=\sqrt{(k-2)(k+1)(k+2)(k+5)+36}=$

$=\sqrt{(k^2+3k-10)(k^2+3k+2)+36}$

Notam $k^2+3k-10=t \Rightarrow a_t=\sqrt{t(t+12)+36}=t+6$

Deci $a_k=k^2+3k-4$ **(10 p)**

Pentru $k=1$ $avem$ $[\sqrt{a_1}]=0$, pentru $k\in\{2,3,4\}$ avem $\left[\sqrt{a_k}\right]=k$.

Pentru $k\geq 5\Rightarrow k+1\leq\sqrt{k^2+3k-4}<k+2\Rightarrow\left[\sqrt{a_k}\right]=k+1$.

Obţinem $2+3+4+6+7+\cdots+n+1=490\Leftrightarrow(n+1)(n+2)=992\Rightarrow n=30$ **(5 p)**