MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Națională, 2024

CLASA a VI-a – soluții

Problema 1. Numerele naturale $1, 2, 3, \dots, 2024$ sunt scrise pe 2024 cartonașe identice, așezate pe o masă cu fața scrisă în jos. Spunem că un cartonaș este *câștigător* dacă numărul scris pe el este divizibil cu 13 sau 100. Care este cel mai mic număr de cartonașe pe care trebuie să le întoarcem, fără a le privi, pentru a fi siguri că am întors un cartonaș câștigător?

Soluție. Pentru a fi siguri că am întors un cartonaș câștigător trebuie să întoarcem cu unul mai mult decât numărul cartonașelor necâștigătoare. **2p**

Multiplii lui 13 mai mici sau egali cu 2024 sunt $13 \cdot 1, 13 \cdot 2, \dots, 13 \cdot 155$, numărul lor fiind 155. . . . . **1p**

Multiplii lui 100 mai mici sau egali cu 2024 sunt $100 \cdot 1, 100 \cdot 2, \dots, 100 \cdot 20$, numărul lor fiind 20. . . . . **1p**

Există un singur multiplu comun al numerelor 13 și 100 printre numerele $1, 2, 3, \dots, 2024$, numărul 1300. . . . . **1p**

În total avem $155 + 20 - 1 = 174$ de numere care sunt multipli ai numerelor 13 sau 100, deci $2024 - 174 = 1850$ de numere care nu au această proprietate. **1p**

Pentru a fi siguri că vom întoarce un cartonaș câștigător va trebui să întoarcem minim 1851 de cartonașe. **1p**

Problema 2. Se consideră mulțimea $A_n = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}, n \in \mathbb{N}^*$. Pentru o pereche (a, b), unde $a, b \in A_n$, se formează numărul $m = \overline{ab}$ obținut prin alipirea (concatenarea) celor două numere a și b. De exemplu, pentru numerele $19, 37 \in A_{30}$, prin alipire se obține numărul $m = 1937$.

a) Care este cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există m pătrat perfect?

b) Determinați cel mai mare pătrat perfect m care se poate obține pentru $n = 50$.

Soluție. a) Din mulțimea $A_{10} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ nu putem forma un pătrat perfect prin alipirea a două numere **2p**

Din mulțimea $A_{11} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$, prin alipirea numerelor 1 și 21, se poate forma pătratul perfect 121, care este cel mai mic. Deci $n = 11$ este numărul căutat. . . **1p**

b) Avem $A_{50} = \{1, 3, 5, 7, \dots, 97, 99\}$. Putem forma, prin alipirea a două numere din mulțimea A_{50}, pătrate de cel mult 4 cifre. **1p**

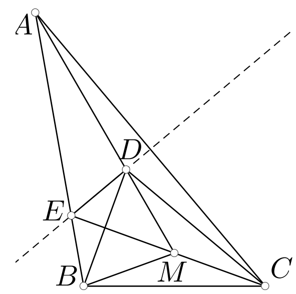
Calculăm cele mai mari pătrate perfecte: $99^2 = 9801$, $97^2 = 9407$, $95^2 = 9025$, $93^2 = 8649$, $91^2 = 8281$. Acestea nu convin deoarece dintre cele două numere alipite primul este par, deci nu poate fi din mulțimea A_{50}. **2p**

Numărul $89^2 = 7921$ poate proveni prin alipirea numerelor 79 și 21 care fac parte din mulțimea A_{50}. Deci cel mai mare pătrat este 7921. . . . . **1p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi cu unghiul $\angle BAC = 30°$ și $\angle ABC = 100°$. Fie m mediatoarea segmentului AC, E intersecția dreptei m cu AB și D punctul de pe m, situat în interiorul triunghiului ABC, pentru care $\angle CAD = 10°$. Fie M intersecția dreptelor AD și CE.

a) Arătați că CE este bisectoarea unghiului $\angle BCD$.

b) Arătați că $AM = AB$.



Soluție. a) Deoarece m este mediatoare, avem $DA = DC$ și $EA = EC$. Rezultă $\Delta DEA \equiv \Delta DEC$ **1p**

Din $DA = DC$ reiese $\angle DCA = \angle DAC = 10°$. **1p**

Avem și $\angle DCE = \angle DAE = 20°$, de unde $\angle BCE = 20°$, deci CE este bisectoarea unghiului BCD.................. **1p**

b) Deoarece $\angle CDA = 160°$, rezultă $\angle ADE = \angle CDE = 100° = \angle CBE$. **1p**

Obținem $\angle CEB = \angle CED = 60°$, deci $\Delta CEB = \Delta CED$. (U.L.U.) **1p**

Reiese $BE = BD$ și, cum $\angle MEB = \angle MED$ iar $ME = ME$, obținem $\Delta MEB \equiv \Delta MED$ (L.U.L.) **1p**

Deducem $\angle EBM = \angle EDM = 180° - \angle CED - \angle AME = 180° - 60° - 40° = 80°$. Cum $\angle BAM = 20°$, reiese că $AB = AM$. **1p**

Problema 4. a) Arătați că fiecare dintre numerele 137, 138 și 139 are numărul divizorilor naturali o putere a lui 2.

b) Care este numărul maxim de numere naturale consecutive cu proprietatea că fiecare dintre ele are numărul divizorilor naturali o putere a lui 2?

Soluție. a) Se arată că 137 și 139 sunt numere prime (nu se divid cu numere prime mai mici sau egale cu 13), deci numărul divizorilor fiecăruia este 2^1................................. **1p**

Descompunând în factori avem $138 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 23^1$, deci numărul 138 are $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ divizori naturali **1p**

b) Extindem secvența de numere consecutive, 137, 138, 139, cu numere care au numărul divizorilor o putere a lui 2.

Avem $136 = 2^3 \cdot 17$, $135 = 3^3 \cdot 5$, $134 = 2 \cdot 67$, $133 = 7 \cdot 19$, numere care au 8, 8, 4, respectiv 4 divizori. Obținem astfel o secvență de 7 numere naturale consecutive, 133,134,135,136,137,138,139, care au numărul divizorilor o putere a lui 2.. **2p**

Arătăm că nu putem găsi 8 numere naturale consecutive cu această proprietate. Într-adevăr, printre oricare 8 numere naturale consecutive există unul care dă restul 4 la împărțirea cu 8, adică un număr a de forma $8k + 4 = 2^2 \cdot (2k + 1)$. Deoarece $2k + 1$ este impar, în descompunerea în factori primi a lui a factorul prim 2 apare la puterea a doua. Rezultă că numărul divizorilor lui a se divide cu 3, deci nu este o putere a lui 2....................................... **2p**

Așadar numărul maxim de numere naturale consecutive cu numărul divizorilor o putere a lui 2 este 7... **1p**